特集／

量子力学に現れる非局所性の意味

木 村　元

1. 注意

本稿は「数理科学, Vol.52-12 (No.618), pp.36-42, サイエンス社，2014」の原稿を少しだけ加筆・修正したものです．2022 年ノーベル物理学賞を記念して公開します [*1]．

2. はじめに

少し思い出話から始めよう．高校のとき，初めて物理学を真剣に学び，この世界を理解する奇跡ともいえる術に心酔し，迷わずこの学問を専攻することにした．しかし，ニュートン力学や電磁気学などの基礎に精通するにつれ，次第に「物理学の対象や法則の相違はあるにせよ，根底にある基礎方程式に立ち戻れば，原理的な困難はもはや存在しない」といった若者にありがちな虚無的な驕りと誤想をいだき始めていた．これを根底から打ち砕いたのは，量子力学との出会いであった．

量子力学は，原子や素粒子などの微視的世界の基礎理論である．しかし，それが語る世界の在り方は，それまで学んだあらゆる物理学と異なっていた．原子核の周りを回る電子は，太陽の周りを回る惑星の姿とは程遠く，むしろ雲のように原子核にまとわりついている．かといって，それは電磁場のような実体のある波ではなく，電子の位置を観測をすると雲のどこか一点に粒子として現れる — それは波動関数と呼ばれる抽象的な複素関数であり，電子が「観測されたときに」何が起こるかを予想するための理論的道具に過ぎないのである．

当然，観測をしていないときに電子がどのように運動しているのかが気になった．ところが量子力学はそのようなことは一切語らず，むしろ，実在的な考え方，すなわち，観測をしていないときのことを語ることは邪道であるとさえ教えられた．量子力学は「観測をすると何が起こるか？」を的確に答えるように出来ているため，実際上「観測をしていないときのこと」に答える必要はない．それでも量子力学は完全な理論であるとされている．

本当にそうなのだろうか？さらに追求すべき実体が隠されているのではないか？

このような思いで量子力学に向き合い，果たしてボーム[1] やネルソン[2] の量子化といった，実際に軌跡の定義できる定式化も知ることになった．また，アインシュタインらの EPR の議論[3] にも後押しされ，益々その思いを強くしたころに**ベルの定理**[4] に出くわした．

結論から述べよう．量子力学を — ひるがえってこの世界を — 局所実在的に理解することはできない．言い換えると，量子力学に何かしら実在的な考え方（例えば，見ていないときにも電子の位置があるなど）をしてしまうと，その実在には奇妙な非局所性が現れる：遠くに離れた実体たち

*1） 公開は雑誌「数理科学」から許可を得ています．

は，どれだけ離れていても瞬時に影響を及ぼしあう — このような非局所性は，相対性理論に反するばかりか，局所的な存在である人類が自然を理解する可能性を奪いかねないほどの破壊力を持つ．

この事実を知ったときは，身もだえもするような衝撃を感じたことを覚えている．この世界の不思議さの一端を垣間見たことに加え,「人類は未だこの世界の“在り方”を理解できていないのでは」という予感に対する武者震いでもあった．

本稿の目的は，できるだけ量子力学の知識を仮定せずに，読者と共にこの思いを共有することにある *2)．

3. 科学は実在を語るべきか？

「月は，今見ていなくても，いつもの場所にあるか？」唐突にこのような質問をされたら「ある」と答える人がほとんどだろう．しかし「それを証明できるか？」と言われたらどうだろう？しかも「いかなる観測も行っていないとき」という条件をつけられたら．

驚くかもしれないが，これを科学的な方法で証明することは出来ない — 例えば，極論を言うと「見た瞬間に月が現れる」などの可能性を排除できない．観測をしていないときのことは，実証を重んじる科学に答えることはできないのだ．

これは，紀元前の哲学の話ではない．20 世紀に入り，原子などの小さな世界の法則をめぐって，物理学者たちの間で真剣に論議された問題である．事実，微視的世界を記述する量子力学は，観測をしていないときのことは一切語らない．その代わりに，電子などの位置，運動量，エネルギーといった物理量を観測したら，どのような測定値をどのような確率で得るかを答えるように出来ている．観測をしていないときのことには触れていなくても，量子力学は科学として完成された理論であるとされている．

これには，アインシュタインを筆頭に，多くの物理学者たちが反論した．観測をしていないときでも，原子は客観的な性質を備えているはずで，量子力学がそれを語らないのは，まだ理論が不完全であるからだと考えた．

しかし冒頭にも述べたように「観測をしていない」ときのことを語ることは容易ではない．特に「語る必要がない」とする者たちに「実在」があることを説得するには，一筋縄でない工夫が必要なのである．

4. EPR の議論

そこで，アインシュタインら（以下，文献[3] の著者たちの頭文字を取って EPR）は頭をひねり，「実在がある」とごく自然に考えてしまう状況を考えた．たとえ話で説明しよう．今，互いに遠くにいる観測者 A と B がいて，その中間地点で二つのボールを発生する装置がある（図 1）．装置のボタンを押すと A と B に一つづつボールが飛んでいく．A と B は飛んできたボールの色を観測する．何度か実験を繰り返すと，次のような状況が確認された．ボールの色は，ランダムに赤か緑が観測される．しかし，後に A と B で確認しあったところ，A が赤色（または緑色）を観測したときは，B は必ず緑色（または赤色）を観測していた（これを，A と B のボールの色が完全（反）相関するという）．この現象を利用すると，A がボー

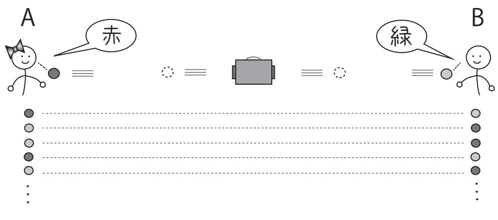

図 1　色の完全（反）相関

ルの色を確認した瞬間に，どんなに遠くにいる B に対しても，そのボールの色が瞬時にわかってしまうことになる．これは不思議な現象だろうか？

少し考えれば，これは特段不思議ではないと思うだろう.「中間地点で，あらかじめ赤と緑のボー

*2)　興味を持った読者は文献[5] の一読をお勧めする．

ルを一つづつ準備して，それを適当に A と B に投げている」と考えれば簡単に説明がつく．たとえ A と B がどんなに離れていようが，A の色が赤ならば，B の色は当然緑になるだろう．

しかし，ここに EPR の狙いがあった．この説明では — A と B が観測する前から — ボールの色が決まっている，すなわち，ボールの色の実在値を考えている．もし色の実在値を考えなければ，A の観測行為が，遠くにいる B のボールに非局所的に影響を与えることになってしまう．アインシュタインは，これを「気味の悪い相互作用（spooky action)」と揶揄し，それが生じないためにも「実在的に考えるべきである」と主張したのである．

何を当たり前のことを小難しく述べているのだろう？古典物理学のように，原子だって位置や運動量などの実在値を持っていると考えればよいではないか？ — そう思った読者は，このまま次節に飛んでもらっても構わない．量子力学をそう単純に理解できないのには理由があるのだ．

以下では，EPR の議論をより正確に説明しておきたい．まず始めに，EPR は**実在の要素**を次のように定義した:「物理系を乱すことなく，確実に（確率 1 で）測定値が予言できるとき，対応する実在の要素が存在する」．

これは実在の十分条件である．単に，確実に予言できるというだけでなく，物理的擾乱を排除することによって，観測行為が測定値を作り出す可能性も避けている．EPR は慎重に「これさえ満たせばさすがに実在があると言えるだろう」という条件を考えたのである．

上述したボールの例でいうと，B 系のボールの色は「実在の要素」になる．なぜならば，B 系のボールの色は，A 系のボールを観測することにより，確実に予言できる．しかも，局所性を要請すると *3)，A 系の観測行為は遠くの B 系を物理的に乱すことがないからである．

しかし，この段階では量子力学の不備を指摘したことにはならない．量子力学においても，一つの物理量に限れば，確実に測定値を予言できる状態（固有状態）が存在するからだ．EPR が攻撃したのは，量子力学の「不確定性原理」である．不確定性原理によると，一般に複数の物理量（粒子の「位置」と「運動量」など）が “同時に” 確定的な値を持つ状態は存在しない．

EPR は，二つの量子力学的粒子（A と B）を考え，それらの位置が完全相関するだけでなく，運動量も完全相関するような量子状態（波動関数）を考え出した（このこと自体は不確定性原理に反しない）．つまり，A の位置を測定すれば，B の位置が確実にわかるだけでなく，A の運動量を測定すれば，B の運動量も確実にわかるような状態だ．

ところが，ボールの例で説明した EPR の論法に従えば，この状態において「粒子 B の位置も運動量も “同時に” 実在の要素となる」と考えられる．これらの要素は不確定性原理に縛られた量子力学には含まれていないので，EPR は量子力学が不完全であると結論付けたのだ．

最後に EPR の議論を具体的な量子状態を用いて確認しておこう（ここでは量子力学の知識を仮定するので，興味のない方は次の節に飛んでください）．EPR が考えた状態は，今では **EPR 状態**と呼ばれる量子状態の一例となっている．ただし，原論文[3] のように，位置や運動量を直接扱うと，系 A と B が遠くに離れている条件が曖昧になってしまうため，ここでは後にボームが考えた，粒子の内部自由度を利用した改良版[6] を見ておこう．

二つの二準位系のスピン一重項状態（最大エンタングルド状態）

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|-+\rangle - |+-\rangle) \tag{1}$$

を考える *4)（ここで，$|0\rangle = (1,0), |1\rangle = (0,1)$, $|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle)$）．このような状態は，二つの光子の偏光状態や二つの電子のスピン状態で実現される．この状態の下で，両系で物理量 σ_x の測定をすると，それぞれの系で測定値 ± 1 を得る同時確

*3） EPR の原論文で局所性は暗黙のうちに仮定されている．

*4） 二粒子の空間の自由度は，空間的に離れた領域にサポートを持つ波動関数を想定している．

率は，$\Pr(\sigma_x = \pm, \sigma_x = \mp|\psi) = |\langle \pm\mp|\psi\rangle|^2 = \frac{1}{2}$，$\Pr(\sigma_x = \pm, \sigma_x = \pm|\psi) = |\langle \pm\pm|\psi\rangle|^2 = 0$（複号同順）となる．つまり，片方の系の測定値が ± 1 ならば，もう片方の系の測定値は確実に ∓ 1 である（完全相関）．同様にして，σ_z 同士の測定でも，両者は完全相関することが確認できる．したがって，EPR の論法によれば，σ_x も σ_z の値も “同時に” 実在の要素となるが，不確定性原理によると σ_x と σ_z が同時に確定的な量子状態は存在しない．

5. ベルの定理

前節ではなるべく EPR の原論文 [*5)] に忠実な説明を試みたが，アインシュタインの主張は単純明解に「実在を考えよう！」ということであり，要は「月（の位置や運動量といった物理的属性）は見ていないときでも存在する」というごく “常識的” なことであった．そのため多くの読者は「何を当たり前のことを小難しく言っているのだろう？」とでも思ったかもしれない．ところが驚くべきことに，1964 年，EPR の議論を推し進めた J.S. ベルは，EPR 状態を「実在性」と「局所性」を両立させる形で理解することは出来ないという信じがたい結論に達したのである！[4]．言い換えると，EPR が見出した量子状態は，いかなる形で実在を導入したとしても，そこから非局所性を追い出すことができない．その後，EPR 状態は実験でも（以下に述べるベル不等式を破る形で）確認されたため[7~11)*6)]，**この世界を局所実在的に理解することはできない**というという事実を受け入れなければならないのだ [*7)]．

本節では，ベルのたどり着いた結論をなるべく一般的な形で解説していきたい．特に，局所実在の仮定の意味を明らかにし，平易ではあるが，厳密な証明も紹介する．

まず始めに，ベルは局所性と実在性を満たすあらゆる理論（**局所実在論**）で成立する条件式を導いた．さらに，EPR 状態 (1) が，この条件式を満たさないことを示した．これにより，この状態を「いかなる局所実在論」を用いても説明できないことがわかるのである．この一連の結果を**ベルの定理**と呼ぶ．

今ではこのような条件式は無数に知られているが，本稿では（恐らく最も有名で簡単な）CHSH 不等式を紹介する[12]．EPR の議論のように，遠く離れた観測者 A と B を考え，やはり中間地点から二つの粒子が A と B に飛んでいくものとする（図 2）．A は測定 M または M' のどちらかをランダムに行い，B も測定 N または N' のどちらかをランダムに行うことができる．ただし，全ての測定は，測定値が二つしかないものとして，その値を（適切な単位系を用いて）± 1 とする [*8)]．ベルは EPR の議論を超えて，局所実在を仮定した場合に測定の多重的な相関（下記 (2) 式など）が満たす普遍的な性質を明らかにした．以下，$\langle M, N\rangle$ などは測定 M, N の積の期待値を表す．

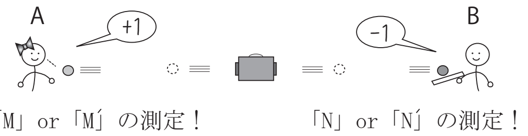

図 2　複数の物理量の相関

*5)　EPR の原論文はアインシュタインとローゼンの議論をポドルスキーが独自にまとめたものであり，アインシュタインのクリアな主張が分かりづらくなっていると言われている．

*6)　2022 年ノーベル物理学賞に[7,12] のクラウザー，[8] のアスペ，[11] のツァイリンガーが選ばれた．ベルは 1990 年，突然の脳出血により 62 歳という若さで亡くなっているため受賞には入っていない．しかし，1989 年には既にノーベル賞候補の最終選考にまで残っていた．

*7)　正確に言うと，ベル不等式の背後にある仮定は，「実在性」「局所性」に加え「測定種類の選択自由性」（平たく言うと，“自由意志”の存在）がある．以下では “自由意志” は存在することが前提の解説となっている．

*8)　ボールのたとえ話では，M と N を色の測定（その測定値は「赤」か「緑」の二つ），また，M' と N' を重さの測定（その測定値は「重い」か「軽い」の二つ）などとすればよい．量子系では，例えば電子のスピン測定や光子の偏光の測定で実現できる．

〈 CHSH の不等式 〉

あらゆる局所実在論において,

$$|\langle M,N\rangle+\langle M,N'\rangle+\langle M',N\rangle-\langle M',N'\rangle|\le 2 \qquad (2)$$

が成り立つ [*a)].

*a) CHSH 不等式の相関の形は,いかにも物理的意味がありそうであるが,筆者はその特別な意味を知らない.ただし,CHSH 不等式のような二値二測定ペアの設定に限定すると,(各相関の符号を入れ替えたものを含めて)(2) の条件が,局所実在論で説明できるための必要十分条件になることが知られている[13)].

以下では幾分直観的な証明をしてから,局所実在論の詳細な説明を与える.

[証明] 実在性を仮定すると,観測する前から M,M',N,N' の測定値が**全て**あらかじめ実在していたことになる.これらは(未知の要因によって)確率的に揺らいでいるが,これらの同時確率分布が存在すると考えられる.また,局所性を仮定することで,この確率分布はそれぞれの系で何を測定したかなどの文脈に依存しない.この同時確率分布を,

$$\Pr(M=m,M'=m',N=n,N'=n') \quad (3)$$

と記す $(m,m',n,n'=\pm1)$.ここで「期待値 = (測定値×確率) の全総和」であることを思い出すと,M と N の積の期待値は $\langle M,N\rangle := \sum_{m,n,m',n'=\pm1} mn\Pr(M=m,M'=m',N=n,N'=n')$.これを測定の全ペアに適用すると,CHSH 不等式の左辺は

$$|\sum(mn+mn'+m'n-m'n')\Pr(m,m',n,n')| \qquad (4)$$

となる(ただし,和は測定値 $m,n,m',n'=\pm1$ に渡って取り,同時確率分布 (3) を $\Pr(m,m',n,n')$ と略した).ここで全ての測定値に対して $|mn+mn'+m'n-m'n'|=2$ に注意する [*9)] と,三角不等式 [*10)] と確率の正値性より,(4) $\le \sum|(mn+mn'+m'n-m'n')\Pr(m,m',n,n')| = 2\sum\Pr(m,m',n,n')=2$ を得る(最後の等式では,全確率の和が 1 であることを用いた).□

この証明は,平易ではあるが,局所実在の仮定がいささか不明瞭である.以下,より一般的な(確率的な)**局所隠れた変数**を説明するが,結果として,これは同時確率分布 (3) の存在を仮定することと等価になる.したがって,上記の証明も一般的で厳密であることに注意されたい.

隠れた変数 λ とは,量子力学の理論には含まれていない要素で,量子力学の確率を定める根源的な要因である(EPR が追求した実在の要素を含む).隠れた変数 λ は(我々の無知や何かしらの未知な要因で)確率 $p(\lambda)$ で揺らいでいる.量子系において,測定 M をして測定値 m を得る確率 $\Pr(M=m)$ は,隠れた変数に渡って平均化することで得られる [*11)]:

$$\Pr(M=m)=\int d\lambda p(\lambda)\Pr(M=m|\lambda). \quad (5)$$

ここで,$\Pr(M=m|\lambda)$ は,隠れた変数 λ が決まったときの測定値 m を得る確率(条件付き確率)である.通常は,λ が固定されると,測定値 m は(確実に)決まると考え,$\Pr(M=m|\lambda)$ は 1 か 0 を取る.しかし,量子力学の理論に見つかっていないあらゆる可能性 — 隠れた変数が決まったとしても現象がランダムに起こる可能性 — も想定して,$\Pr(M=m|\lambda)$ を一般的な確率分布とすることが多い(これを確率的隠れた変数と呼ぶ).

EPR によると,このような隠れた変数(実在)があったとしても,それは局所的な性質を持つべきである.すなわち,遠くに離れた系 A と B における測定 M と N は,ひとたび隠れた変数 λ が決まると,統計的に独立(同時確率分布は積の確率分布)となるものと要請する: $\Pr(M=m,N=n|\lambda)=\Pr(M=m|\lambda)\Pr(N=n|\lambda)$.量子力学が予言する同時確率分布 $\Pr(M=m,N=n)$ は,

*9) このことを確認せよ: 例えば,$m=1,m'=-1,n=1,n'=-1$ の場合は,$mn+mn'+m'n-m'n'=1\times1+1\times-1+-1\times1-(-1\times-1)=-2$.

*10) $|a+b|\le|a|+|b|$.これより $|\sum_i f(i)|\le\sum_i|f(i)|$ に注意.

*11) 正確には条件付き確率の定義と確率の和法則を用いている.

これに λ の揺らぎを考慮して，

$$\int d\lambda p(\lambda)\mathrm{Pr}(M=m|\lambda)\mathrm{Pr}(N=n|\lambda) \tag{6}$$

で与えられる．このように，局所性を満たす隠れた変数を用いる理論を**局所実在論**と呼ぶ *12)．量子力学以外のあらゆる古典物理学は — 隠れた変数（実在）が隠れていない（未知でない）ことを除けば — 局所実在論であることに注意する．

少し抽象的な説明が続いたので，隠れた変数を身近なサイコロ投げで説明しておこう（図 3）．通常のサイコロ投げの目の測定 M を考えると，目の値 $m=1,\ldots,6$ が出る確率は全て $\mathrm{Pr}(M=m)=1/6$ である．ところが，サイコロ投げの軌跡がニュートン力学に従うとすると，結果が確率的に揺らぐのは「投げた瞬間の位置 $\boldsymbol{r}$，速度 $\boldsymbol{v}$，サイコロの角度 $\theta,\cdots$ など」を知らないからだ．これら

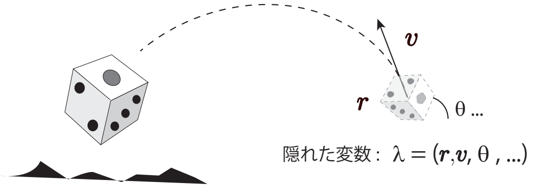

図 3　サイコロ投げの隠れた変数

がサイコロ投げの隠れた変数 $\lambda=(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},\theta,\cdots)$ であり，λ さえ決まればサイコロの目が確実に決まると考えられる．より一般的には，λ が決まったとしても，床の凸凹具合などの理由で，なお結果は確率的にゆらぐ可能性もある．これが $\mathrm{Pr}(M=m|\lambda)$ である．ところが隠れた変数 λ は，人間の投げる癖などで確率 $p(\lambda)$ で揺らぐため，最終的にサイコロの目の確率が（5）を通じて決まるのである．さらに，遠くに投げられる二つのサイコロ（図 4）を考えると，隠れた変数 λ はそれぞれのサイコロの初期位置，速度，角度のペアで与えられる．隠れた変数 λ が与えられると，それぞれの目が出る確率は，それぞれの場所の床の具合などで局所的に決まるが，局所性の要請から独立となる．これに，隠れた変数の確率 $p(\lambda)$ を考慮すると，最終的な同時確率分布は (6) で与えられる．

*12)　局所実在性のより詳しい条件分析は[14] を参照せよ．

局所実在論は，量子力学に「局所性を満たす形で未知の実在を見出す」いかなる試みも含んでいる．ところが局所実在論は，CHSH が想定している測定 M,M',N,N' の確率に関しては，同時確率分布 (3) を仮定することと等価であることがわかる[13]．実際，局所実在論を仮定すると，同時確率分布 (3) を $\int_\lambda d\lambda p(\lambda)\mathrm{Pr}(M=m|\lambda)\mathrm{Pr}(M'=m'|\lambda)\mathrm{Pr}(N=n|\lambda)\mathrm{Pr}(N'=n'|\lambda)$ と導入することができる．逆に，同時確率分布 (3) を仮定すると，隠れた変数自身を測定値のペア（$\lambda=(m,m',n,n')$）に，また，その確率 $p(\lambda)$ を (3) と取ることができ，それぞれの局所確率を $\mathrm{Pr}(M=l|m,m',n,n'):=\delta_{lm}$ などと置くことで，局所実在論を導入することができる．

最後に，EPR 状態 (1) が，適切に選ばれた量子測定によって CHSH 不等式 (2) を破ることを見ておこう（ここでは量子力学の知識を仮定する）．x-z 平面内の二つの単位方向ベクトル $\boldsymbol{m}=(m_x,m_z),\boldsymbol{n}=(n_x,n_z)$ に対し，二粒子のそれぞれの系で，$\boldsymbol{m}$ 方向パウリ行列 $\sigma_{\boldsymbol{m}}:=m_x\sigma_x+m_z\sigma_z$ の測定 M 及び $\boldsymbol{n}$ 方向パウリ行列 $\sigma_{\boldsymbol{n}}:=n_x\sigma_x+n_z\sigma_z$ の測定 N の同時測定を考える．量子力学の期待値の公式を用いると

$$\langle M,N\rangle=\langle\psi|\sigma_{\boldsymbol{m}}\otimes\sigma_{\boldsymbol{n}}\psi\rangle=-\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n} \tag{7}$$

を得る（$\otimes$ はテンソル積の記号）*13)．CHSH 不等式の測定 M,M',N,N' をそれぞれ $\boldsymbol{m}=(0,1)$, $\boldsymbol{m}'=(1,0)$, $\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$, $\boldsymbol{n}'=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$ 方向のパウリ行列と取れば，(7) より $\langle M,N\rangle=\langle M,N'\rangle=\langle M',N\rangle=-\langle M',N'\rangle=-1/\sqrt{2}$ を得る．したがって (2) の左辺は $2\sqrt{2}\simeq 2.8$ となり，CHSH 不等式を破る *14)．

図 4　二つのサイコロ投げの局所隠れた変数

*13)　(1) 及び $\sigma_x|0\rangle=|1\rangle,\sigma_x|1\rangle=|0\rangle,\sigma_z|0\rangle=|0\rangle,\sigma_z|1\rangle=-|1\rangle$ を用いて確認せよ．

*14)　$2\sqrt{2}$ は量子系における最大の破れである[15]．

6. 量子力学は非局所的な理論なのか？

ベルの定理は,「局所性」と「実在性」を同時に取り込む形で量子力学を理解することができないことを意味する．そのため — しばしば喧伝されるように — 量子力学が非局所的な理論であると断ずるのは言い過ぎであろう．事実，実在性を放棄すれば，量子力学の局所性を担保することができる．これにより，量子力学と相対性理論は平和的に共存できるのである．量子力学の “非局所性” を利用した「光速を超えた通信の可能性」といった誤解を生じさせないためにも，むしろ，量子力学は実証的な立場では立派な局所的な理論であることを認識することが重要であろう．

実証的な意味で局所的であることは，系 A へのいかなる操作を通じても，遠隔地にある系 B に瞬時に（あるいは光速を超えて）検出可能な物理的影響が伝わらないこととして定義できる．局所性の意味は広義にわたるため，これを**瞬間伝送禁止則**（No-Signalling 条件）と呼んで区別する．

以下，量子力学が瞬間伝送禁止則を満たすことを証明する（ここでも量子力学の知識を仮定する）．最も一般的な設定では，量子状態と測定はそれぞれ，密度行列 *15) ρ 及び POVM（positive operator valued measure）*16) $M=(E_m)_m$ で与えられ，測定値 m を得る確率は $\mathrm{Pr}(M=m|\rho)=\mathrm{Tr}(E_m\rho)$ となる[16]．合成系 A+B が密度行列 ρ の状態にあり，系 A 及び系 B でそれぞれ局所的に POVM 測定 $M=(E_m)_m$ と $N=(F_n)_n$ をすると，測定値 m 及び n を得る確率は

$$\mathrm{Pr}(M=m,N=n|\rho)=\mathrm{Tr}(E_m\otimes F_n\rho) \quad (8)$$

で与えられる．なお，系 A の測定値 m を知らない系 B にとっての確率分布は（確率の和法則より，測定値 m に渡って和を取った）周辺分布で与えられる:

$$\mathrm{Pr}(N=n|\rho):=\sum_m \mathrm{Pr}(M=m,N=n|\rho). \quad (9)$$

ここで，POVM 測定には（他の物理系と相互作用をさせてから物理量を測定するなど）可能な操作が全て含まれていることに注意する[16]．したがって，瞬間伝送禁止則を「系 A の測定の選択が，系 B の周辺分布に影響を及ぼさないこと」と定義しても一般性は失われない．以上より量子力学が瞬間伝送禁止則を満たすは容易にわかる．実際，(8) を系 B の周辺分布 (9) に代入すると，

$$\begin{aligned}\mathrm{Pr}(N=n|\rho)&=\sum_m \mathrm{Tr}(E_m\otimes F_n\rho)\\ &=\mathrm{Tr}((\sum_m E_m)\otimes F_n\rho)=\mathrm{Tr}(\mathbb{I}_A\otimes F_n\rho)\end{aligned}$$

となり，系 B の周辺分布が系 A の測定 $M=(E_m)_m$ に依存していないことがわかる（式変形では，トレースとテンソル積の線形性及び POVM の性質 $\sum_m E_m=\mathbb{I}_A$ を用いた）．

このように，観測にかかるレベルでの非局所性は量子力学には存在しないことに注意する．

7. 終わりに

本稿では，量子力学に現れる非局所性に関して，EPR の議論とベルの定理を中心に解説した．

アインシュタインたちは「局所性を救うために，実在の要素が存在するはずである」と推論し，EPR の議論はその方向への確かな手がかりとなると信じていた．皮肉にもベルは，どのような形で量子力学に実在を導入しても，非局所性を追い出すことはできないという驚愕の事実にたどり着いた．EPR 状態を見出したアインシュタインたちは，ある意味でパンドラの箱を開けてしまったのである *17)．

我々はベルの定理から何を学ぶのであろうか．前節で示したように，実証レベルにおける非局所性は量子力学にも現れない．この世界を理解するために，実在的な方法論を放棄しなければならない

*15） $\mathrm{Tr}\,\rho=1$ を満たす正値行列．ここで Tr は行列のトレース（対角成分の和）．正値行列 ρ とは，任意のベクトル $|\psi\rangle$ に対して，$\langle\psi|\rho\psi\rangle\geq 0$ を満たす行列のこと．

*16） m は測定値のラベル，E_m は $\sum_m E_m=I$ を満たす正値行列の組．ここで I は単位行列である．

*17） ベルの結果に対するアインシュタインの反応は興味深いが，残念ながらその 9 年前にアインシュタインは亡くなっている．

のか？あるいは,「気味の悪い相互作用」を乗り越えてもなお，人類が “世界の在り方” を正しく理解できる道が残されているのか？その答えは未だ誰にもわかっていない．ベルの定理は「科学の最も深遠な発見」と評され[17)]，今でも世界の認識方法の根幹を曖昧なものとしている．

他方で近年 EPR 状態は，情報通信技術に目覚しい応用ができることがわかってきた．この状態（一般的に，エンタングルド状態）を活用すると，スーパーコンピュータをも圧倒する量子コンピュータ，絶対に解読されることのない量子暗号，物体（量子状態）の転送を可能とする量子テレポーテーションなどが可能となる[16)]．不思議さは不思議なものとして素直に受け入れて，どのように活用するかということもまた科学のあり方であろう．

今後のさらなる展開からますます目が離せない．

参考文献

1) D. Bohm, Phys. Rev. **85**, 166 (1952).
2) E. Nelson, Phys. Rev. **150**, 1079 (1966).
3) A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, Phys. Rev. **47**, 777 (1935).
4) J. S. Bell, Physics, **1**, 195 (1964).
5) N. D. マーミン『量子のミステリー』(訳 町田茂, 丸善, 1994）; 筒井 泉『量子力学の反常識と素粒子の自由意志』(岩波書店, 2011）．
6) D. Bohm, *Quantum Theory* (New York, 1951).
7) S. J. Freedman, J. F. Clauser, Phys. Rev. Lett. **28** 938 (1972).
8) A. Aspect, et al., Phys. Rev. Lett. **47**, 460 (1981).
9) B. Hensen, et al., Nature **526**, 682 (2015).
10) L. K. Shalm, et al., Phys. Rev. Lett. 115, 250402 (2015);
11) M. Giustina, et al., Phys. Rev. Lett. 115, 250401 (2015).
12) J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony, R. A. Holt, Phys. Rev. Lett. **23**, 880 (1969).
13) A. Fine, Phys. Rev. Lett. **48**, 291 (1982).
14) M. L. G. レッドヘッド『不完全性・非局所性・実在主義ー量子力学の哲学序説』(訳 石垣 寿郎, みすず書房, 1997）; A. Shimony, “Bell Theorem” in *Stanford Encyclopedia of Philosophy*: http://plato.stanford.edu/entries/bell-theorem).
15) B. S. Cirel’son, Lett. Math. Phys. **4**, 93 (1980).
16) 石坂智, 小川朋宏, 河内亮周, 木村元, 林正人:『量子情報科学入門』，共立出版（2012）．
17) H. P. Stapp, Nuovo Cimento, **29B**, 270 (1975).

（きむら・げん，芝浦工業大学 システム理工学部）