

弱値と量子アルゴリズム

細谷暁夫

Part 1: 弱値と弱測定のリビュー

1.1 光子の裁判

1.2. which-way の弱値

1.3 ……の弱測定

Part 2: 量子アルゴリズムへの応用

2.1 問題に対応する量子もつれ状態 ψ

2.2 ψ を通過する量子遷移と弱値

2.3. まとめ



1.1 光子の裁判



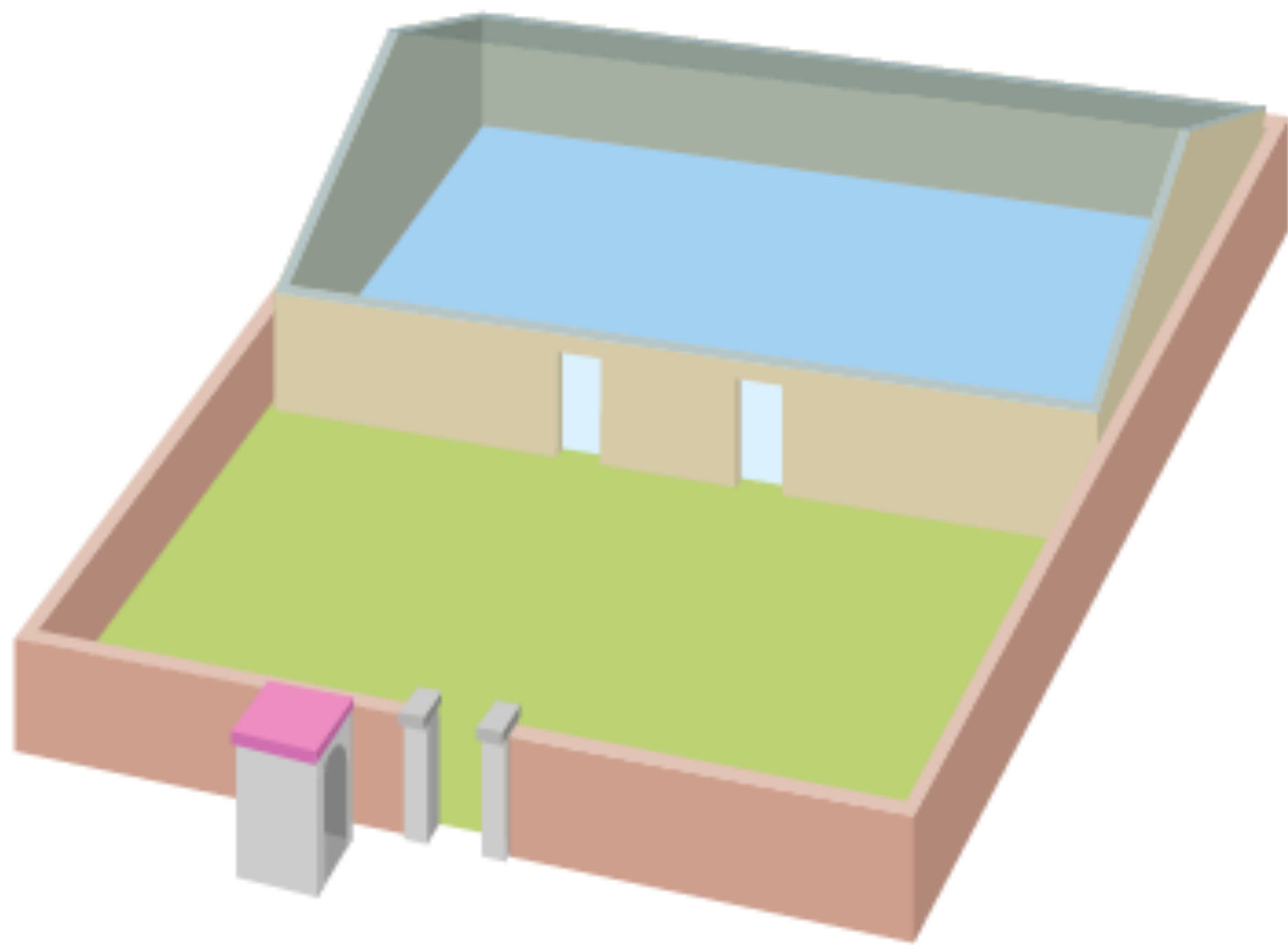
しかし、光が
波でもあり粒子でもあるとは、
ということなのだろうか？



初版：

wiki

朝永振一郎「光子の裁判」／日経サイエンス



2つの窓 被告・波乃光子が侵入した家には窓が2つあった。果たしてどちらから入ったのか。

光子裁判

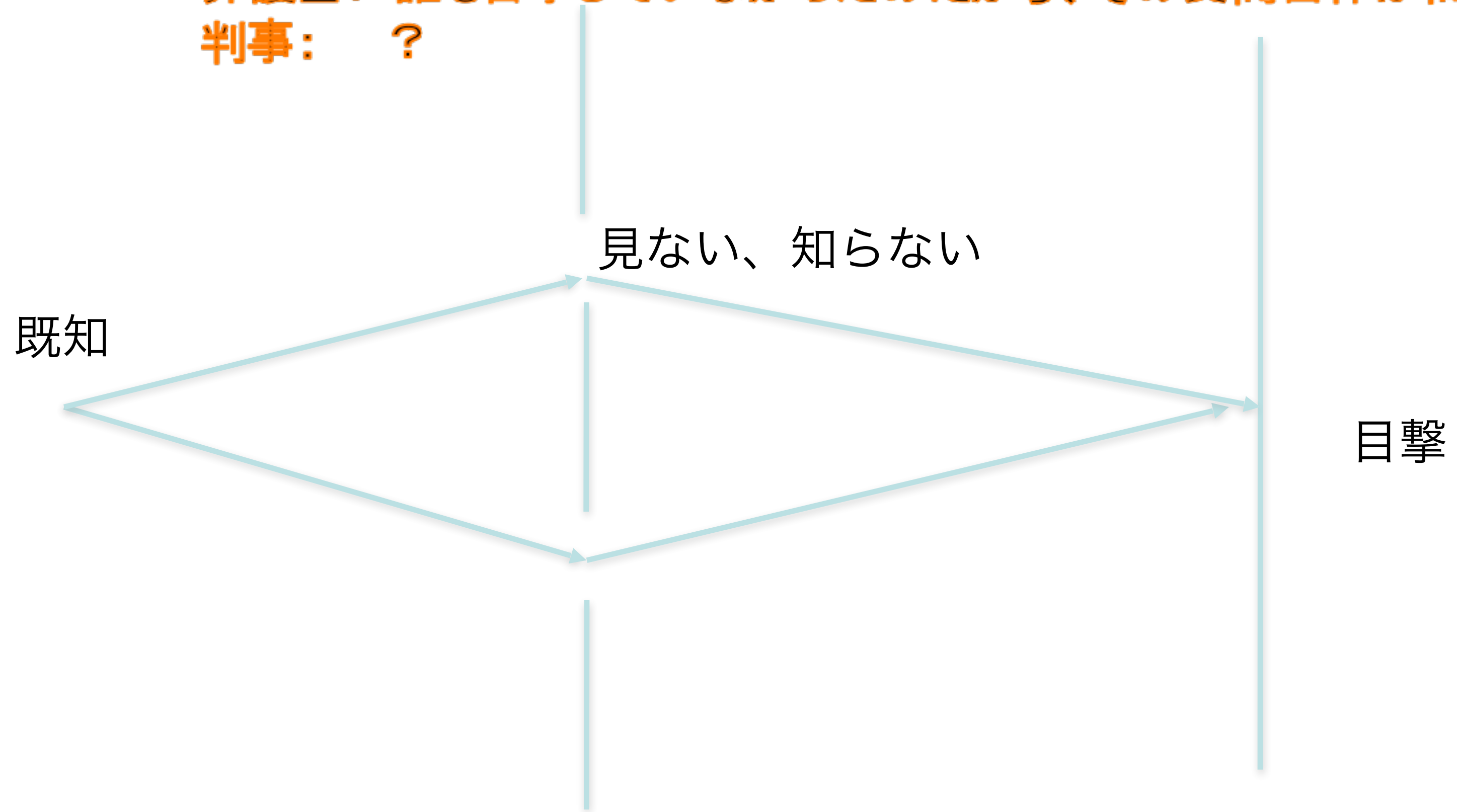
検事: 「波乃光子はどちらの窓(スリット)を通ったのか？」

光子: 「私は両方の窓を通りました」

検事: 「怒！」

弁護士: 「誰も目撃していなかったのだから、その質問自体が間違い」

判事: ？



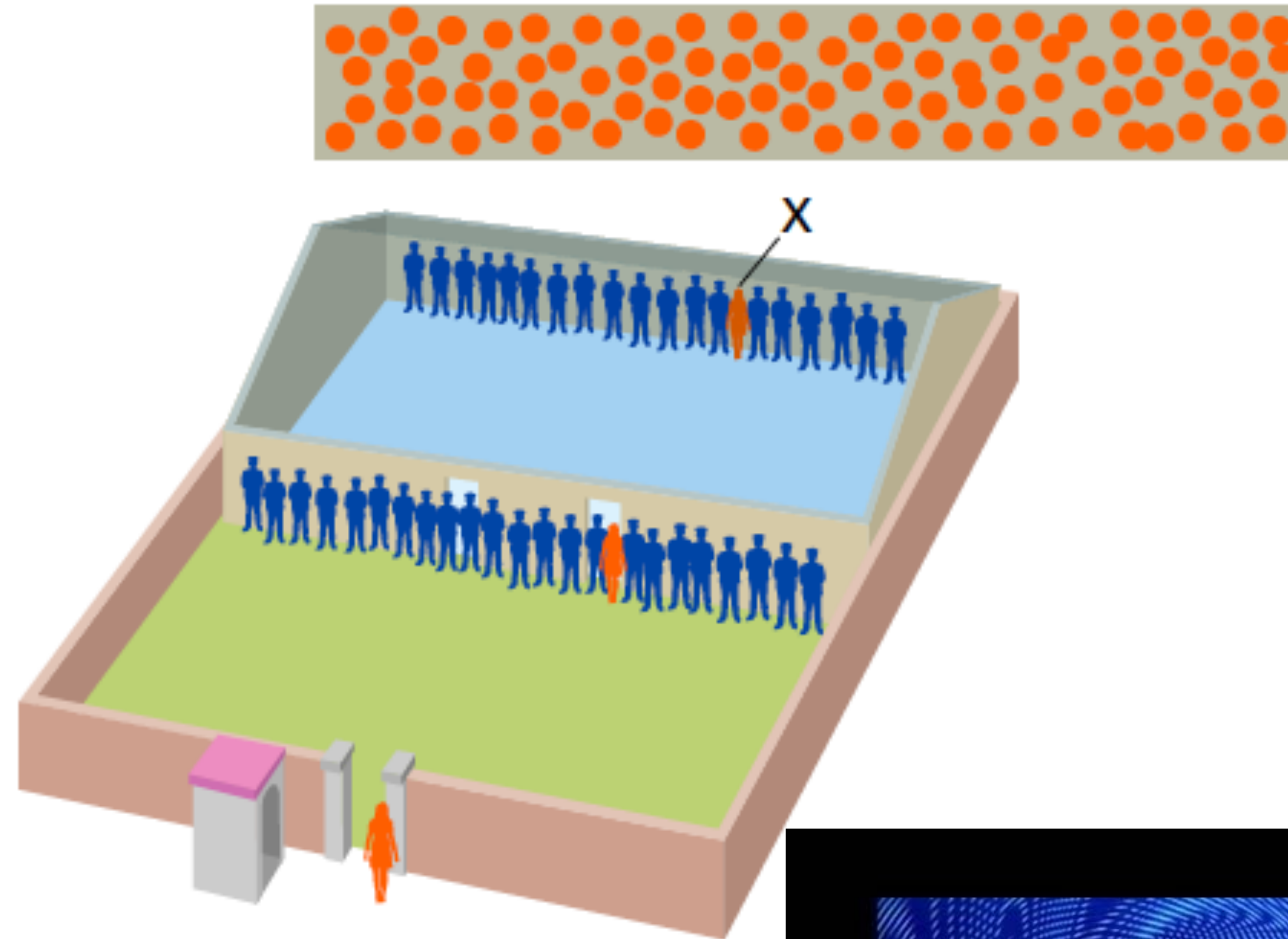
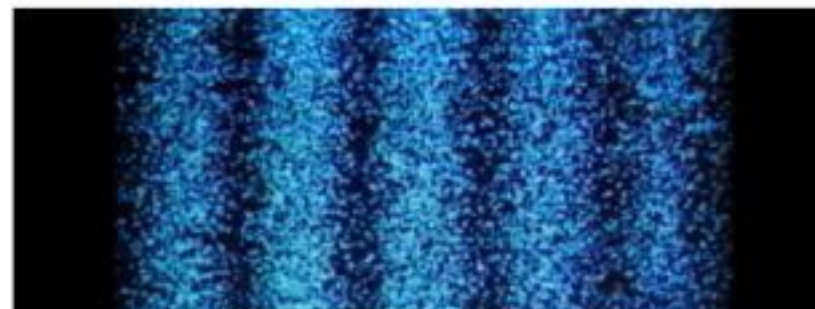
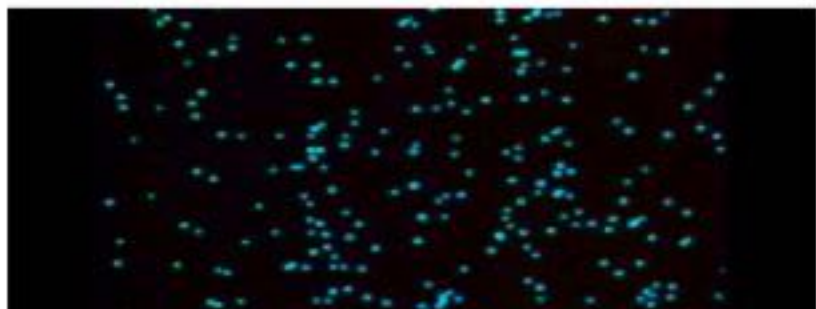


図 3

スクリーン上に、光子が到達した場所が記録される。

記録された光子の数が増えると、干渉縞が姿を現す。



光子の裁判は通常の裁判と同様に現在得られた証拠から過去の事実を推定するので普通の物理と問題設定が逆になっている。量子力学を裁判仕立てで説明する視点に朝永振一郎の洞察力に感心する。

終状態 $|f\rangle$ を「事後選択」して、それ以前の物理量の値を議論する設定になっている。

参考：ボーアとシュレーディンガーのコペンハーゲンにおける論争
電子が初め $2p$ 状態にあり、最終的に $1s$ 状態に遷移した時に、途中どこにいたのか？

AH: 数理科学6月号

アハラノフの弱値、弱測定と時間の向き

1.2. Which-way の弱値

$$|A\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|B\rangle + |C\rangle)$$

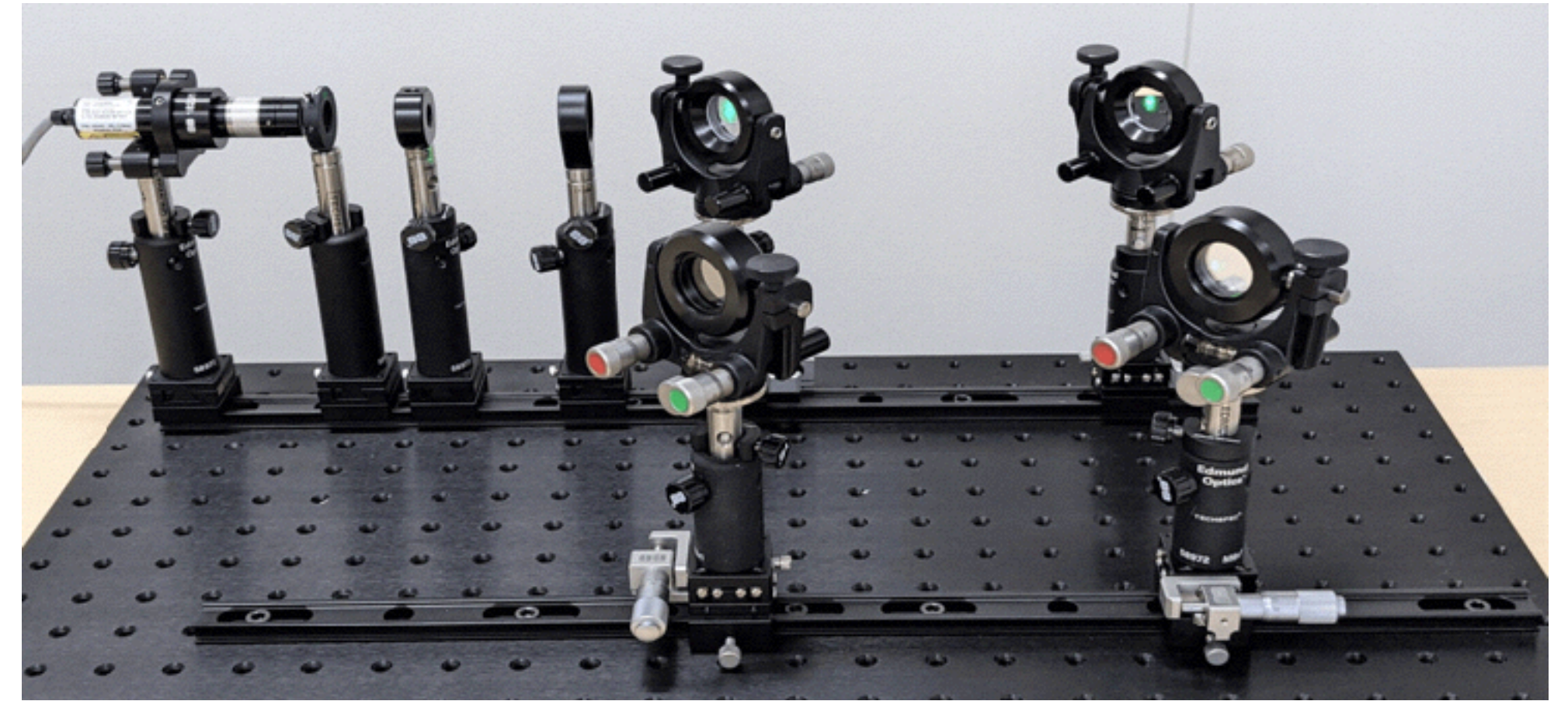
$$|B\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|D\rangle + |E\rangle)$$

$$|C\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|D\rangle - |E\rangle)$$

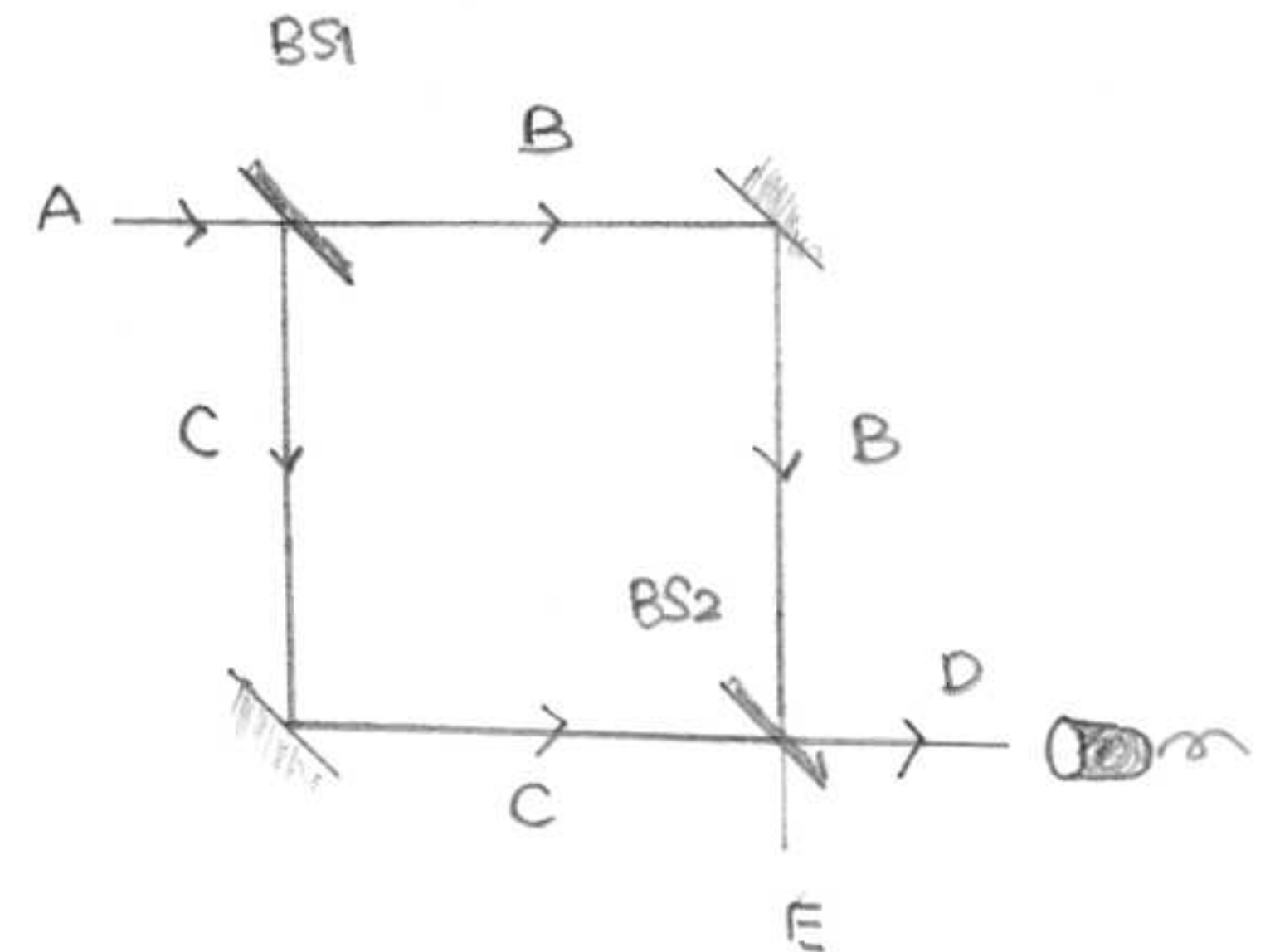
したがって、

$$|D\rangle \leftarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|B\rangle + |C\rangle) \leftarrow |A\rangle$$

$$|E\rangle \leftarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|B\rangle - |C\rangle) \leftarrow |A\rangle^\perp$$



マッハ・ツエンダー干渉系



光子の裁判をアハラノフたちの提案した弱値で考えてみよう。

Dで検出された光子はBとCのどちらを通過してきたのだろうか？

$$|D\rangle \leftarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|B\rangle + |C\rangle) \leftarrow |A\rangle$$

数式では重ね合わせ状態なので両方通ったとしてもいい？

はっきりとした数値が欲しい。

アハラノフたちは、初期状態 $|i\rangle$ において状態が $|f\rangle$ が事後選択された場合、

物理量 \hat{O} の「弱値」 fO_i を

$$fO_i = \frac{\langle f | \hat{O} | i \rangle}{\langle f | i \rangle}$$

と定義した。

初期状態が $|A\rangle$ で終状態が $|D\rangle$ の場合、経路B,Cを通る「確率」を

射影演算子 $|B\rangle\langle B|, |C\rangle\langle C|$ の弱値で与えよう。

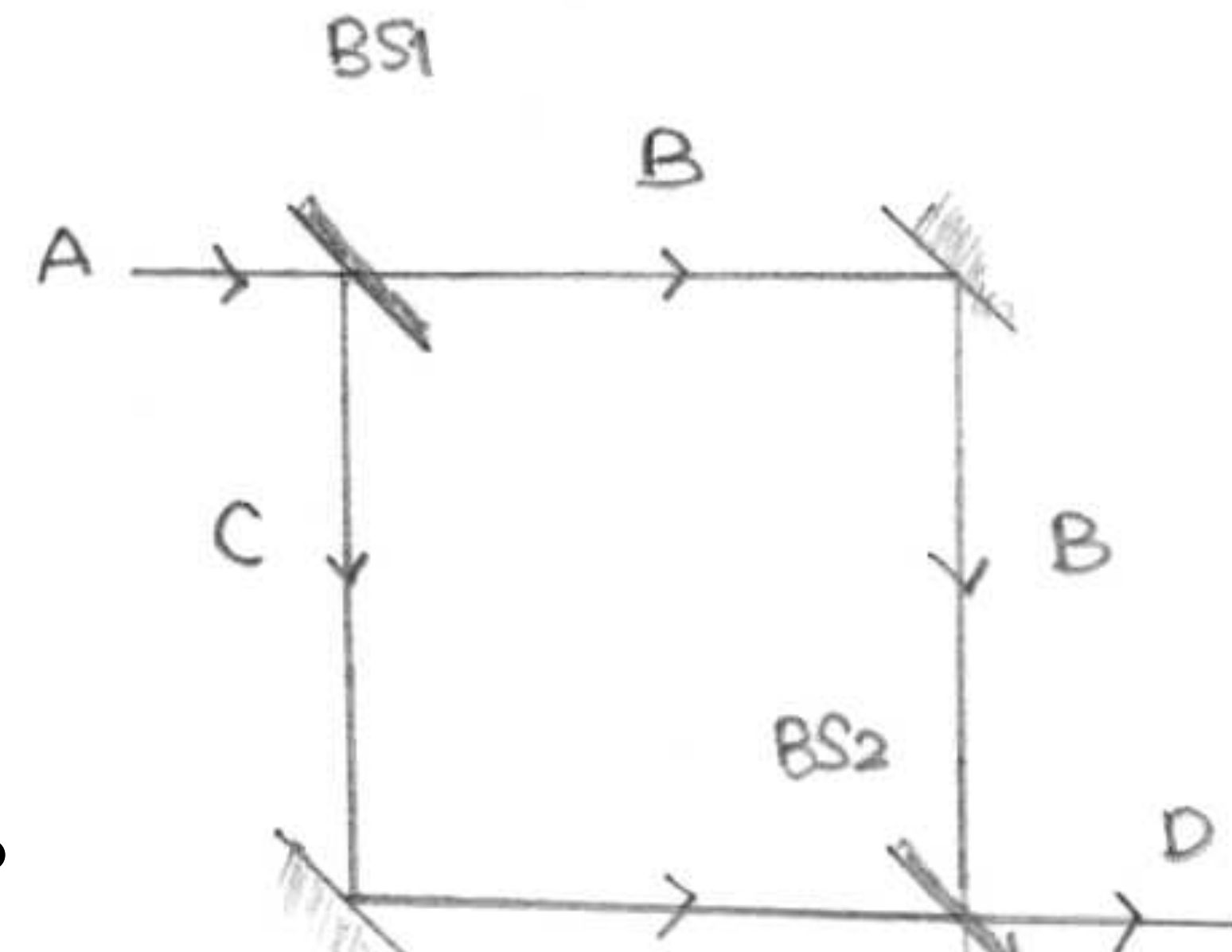
$$\frac{\langle D||B\rangle\langle B||A\rangle}{\langle D|A\rangle} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\langle D||C\rangle\langle C||A\rangle}{\langle D|A\rangle} = \frac{1}{2}$$

それぞれ $1/2$ になり、直観を数値に表現している。
ちなみに、Cをブロックすると、上記の値はそれぞれ

1、0 Bをブロックすると、0、1になる！

「確率」の総和は $|B\rangle\langle B| + |C\rangle\langle C| = 1$ より 1 になる。

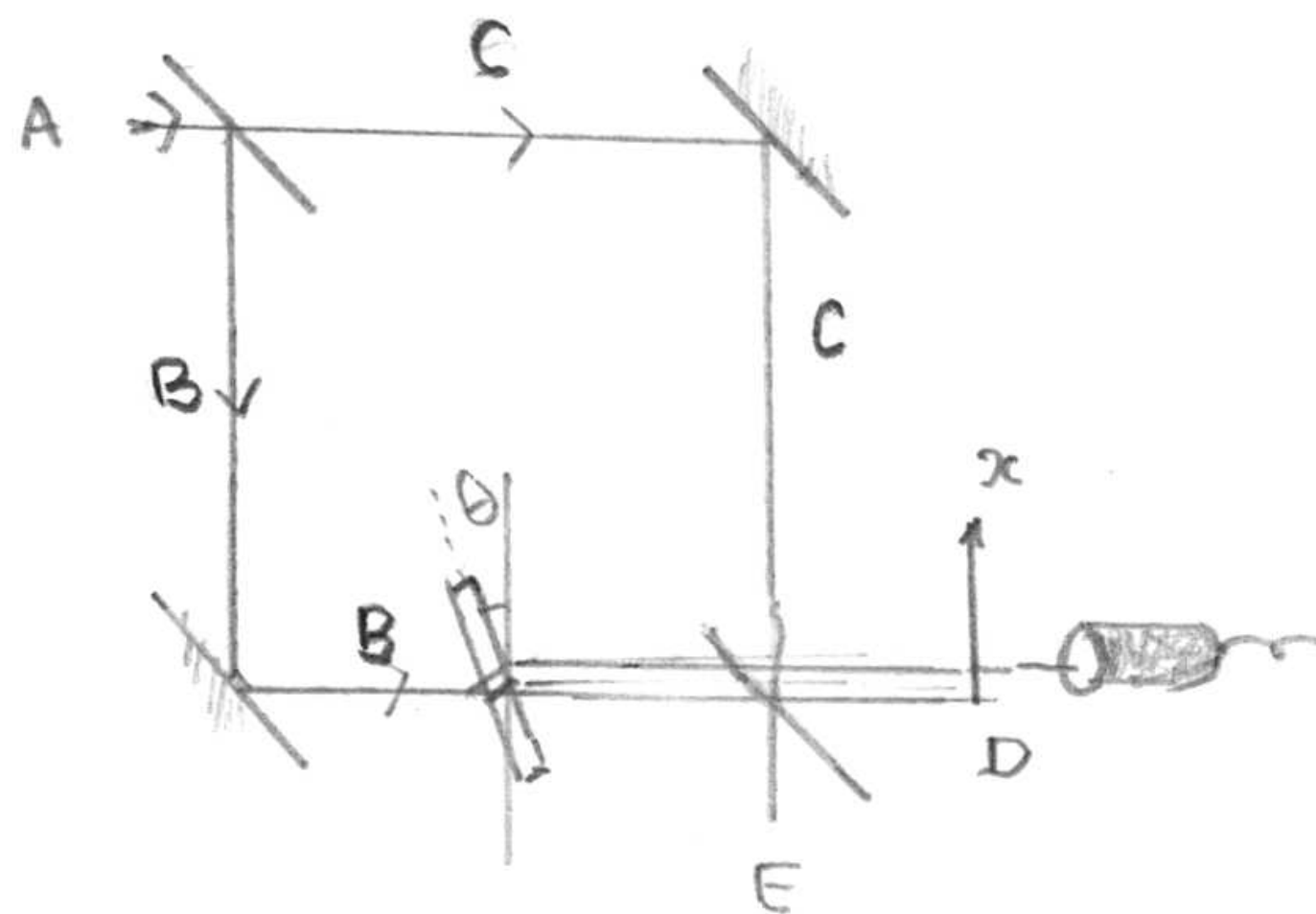


1.3 弱測定によって弱値を実測する

検事： 弁護士による弱値に基づく反論は「推測」によるもので証拠によるものではありません。



弁護人（アハラノフ）： それでは、弱値を与える実験をお見せして実証しましょう。



具体的な実験設定を物理量が射影演算子 $|B\rangle\langle B|$ の場合に説明しよう。経路Bに薄いスライドガラスを、垂直より少し傾けて挿入する。

左側からBの経路に進入した光はスライドガラスによってわずかに屈折し、図においては少し上方で2番目のビームスプリッター。最終的には上方にシフトしてDの位置で計測される。

光軸に垂直な方向に座標 x を導入する。

相互作用ハミルトニアン H_{int} を、時刻 $t = t_0$ に瞬間的に働く作用を表す

$$H_{int} = g p_x |B\rangle \langle B| \delta(t - t_0)$$

としよう。ここに p_x は運動量の x 成分、すなわち座標 x をシフトする演算子で、薄いスライドガラスによって屈折する作用が表現されている。結合定数 g は、ガラスの厚み d と傾きの角度 θ で $g = \theta d$ と書ける小さい量である。

時間発展演算子 U は

$$U = e^{-i \int dt H_{int}} = e^{-ig p_x |B\rangle \langle B|}$$

となるので、 x 方向の自由度に対応する量子状態を $|\xi\rangle$ とすると、

$$\langle x | U | \xi \rangle = \langle x | e^{-i \int dt H_{int}} | \xi \rangle = \langle x | e^{-ig p_x |B\rangle \langle B|} | \xi \rangle$$

したがって

$$\langle f | \langle x | U | \xi \rangle | i \rangle \approx \langle f | i \rangle \xi \left(x - g \frac{\langle f | B \rangle \langle B | i \rangle}{\langle f | i \rangle} \right)$$

確率分布は、この絶対値の2乗で与えられるから、

その平均値は、

$$\Delta x = \text{Re} \left[g \frac{\langle f | B \rangle \langle B | i \rangle}{\langle f | i \rangle} \right]$$

だけシフトする。

したがって、Dにおいて上記のシフトを測れば、演算子 $|B\rangle\langle B|$ の弱値が測れる。

ただし、1個の光子に対してシフトが求まることはなく、多数回の測定をしてその分布の平均値から求まる。(光子団の裁判?)

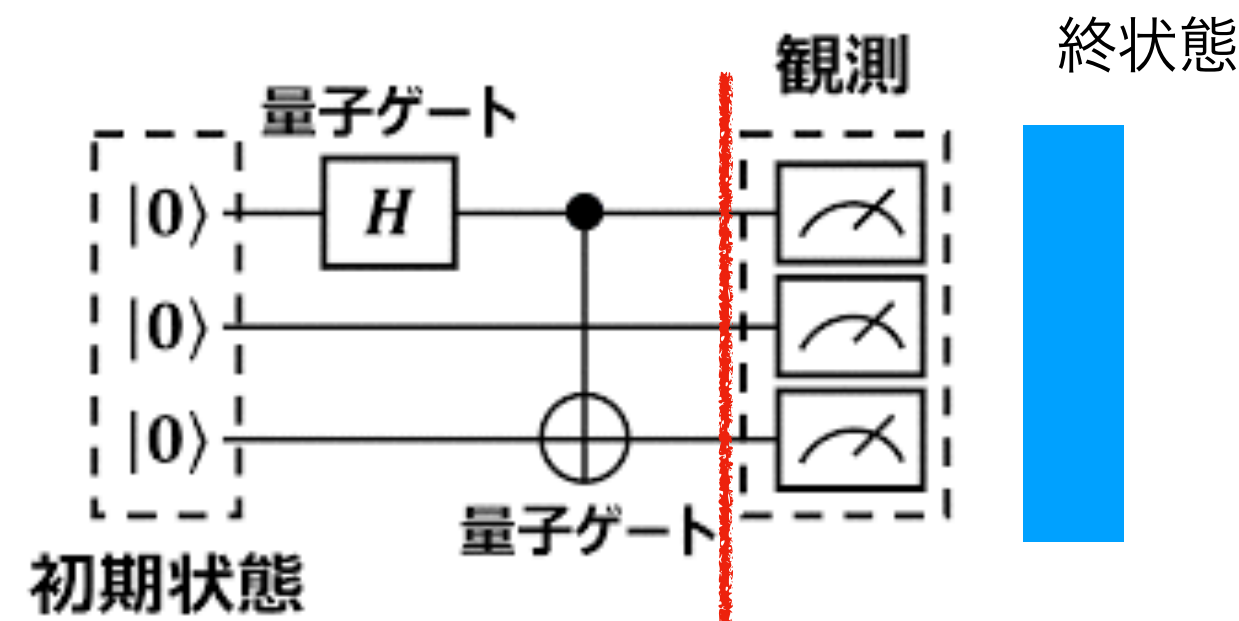
Part 2. 弱値の応用

アインシュタインは、何が測定可能量かは理論が決めると述べた。

「部分と全体」 W. ハイゼンベルク著

アハラノフは、量子力学のコペンハーゲン解釈の範囲内で「弱値」を測定可能量とすることに成功した。

弱値の意義はその有用性にかかっている。ここでは、量子アルゴリズムの考案に対する有用性を示唆する。



課題に対して $|\psi\rangle$ の選択：アルゴリズム

$|i\rangle \rightarrow |\psi\rangle$ の回路を書く：プログラミング

$$|i\rangle \longrightarrow |\psi\rangle \longrightarrow |f\rangle$$

測定前の状態への射影演算子 $|\psi\rangle\langle\psi|$ の擬確率が1の場合、量子状態は

初期状態 $|i\rangle$ から中間状態 $|\psi\rangle$ を必ず通過して終状態 $|f\rangle$ に至る、と解釈する

$$\langle f|i\rangle = \langle f|\psi\rangle \langle \psi|i\rangle$$

2.1. アルゴリズムの例示 (2qubits)

課題： $a + b = 0 \pmod{2}$ を満たす $a, b \in \{0,1\}$ を発見せよ。

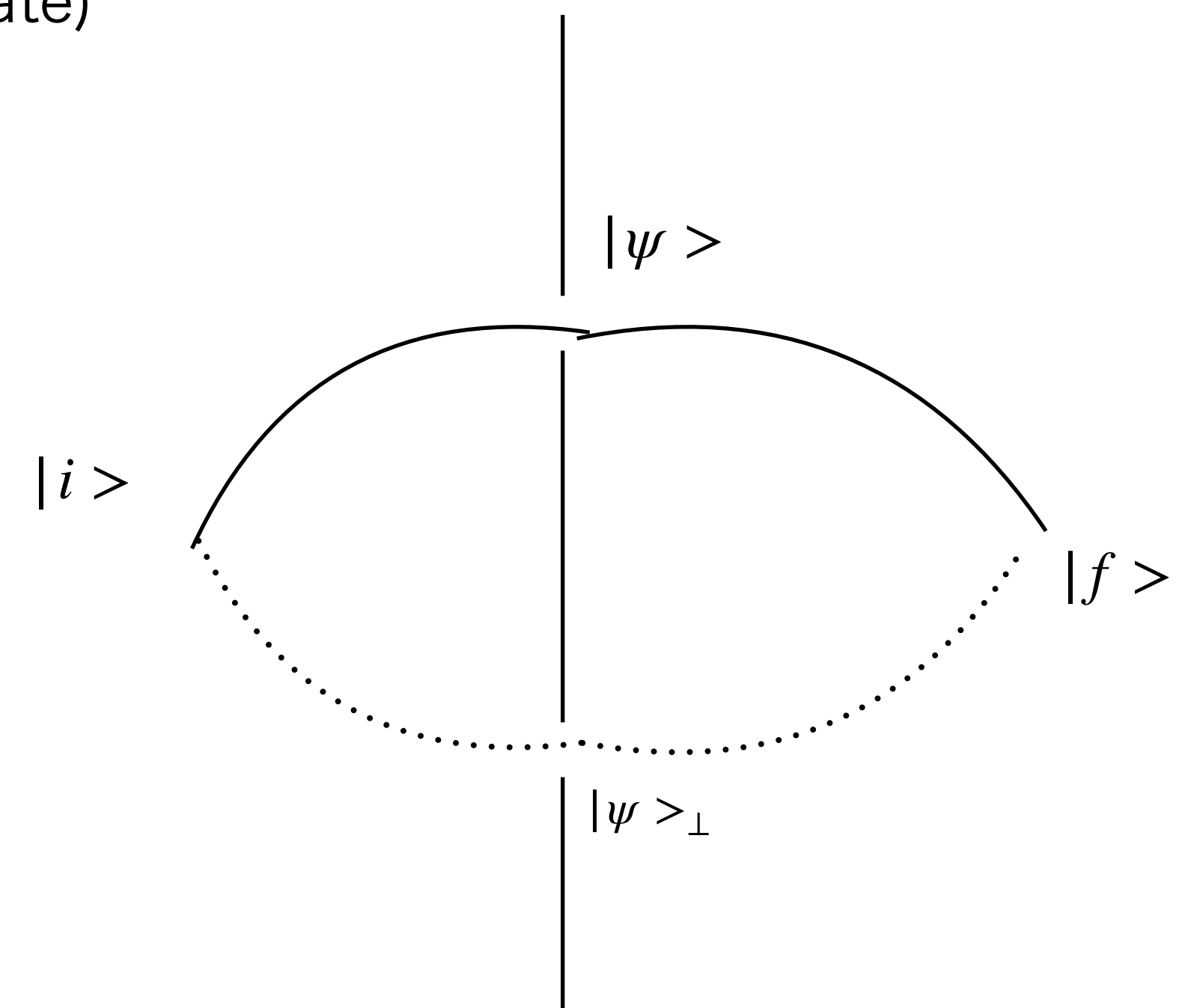
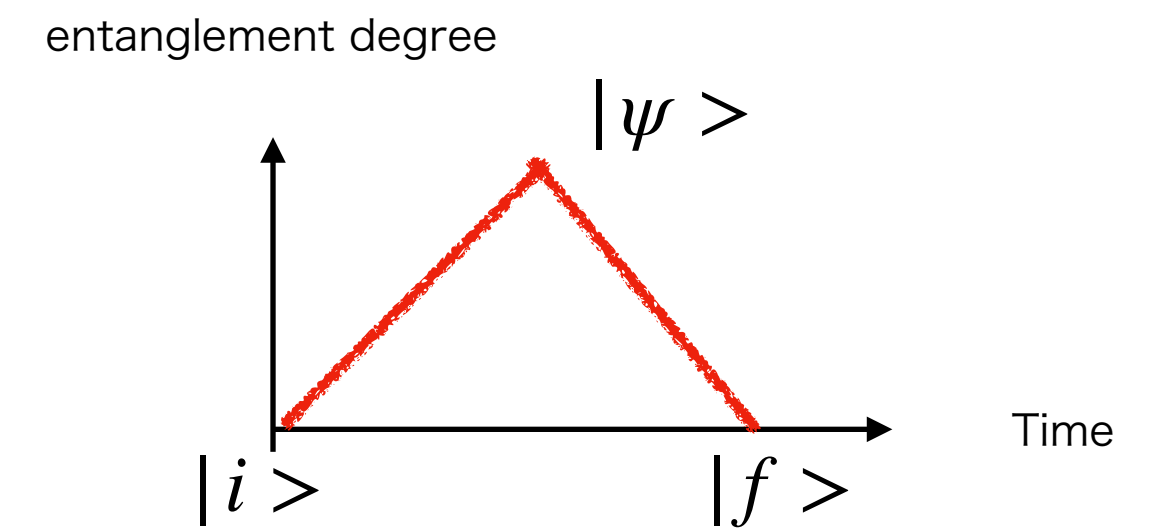
初期状態： $|i\rangle = \frac{1}{2}[|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle]$ (separable state)

中間状態： $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|00\rangle + |11\rangle]$ (entangled state)

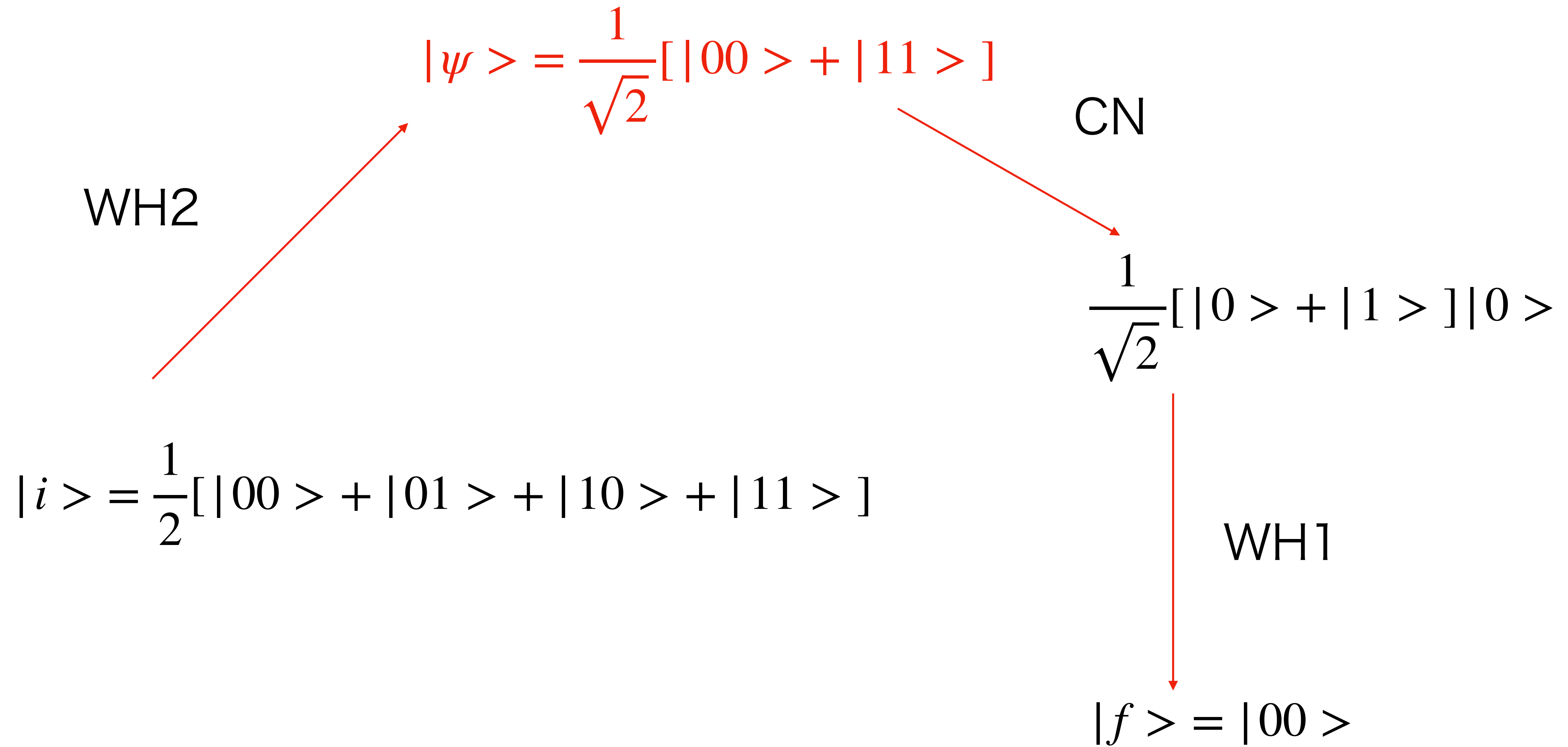
終状態： $|f\rangle = |00\rangle$ (separable state)

$$\text{擬確率} : \frac{\langle f|\psi\rangle \langle \psi|i\rangle}{\langle f|i\rangle} = \frac{(1/\sqrt{2})^2}{\frac{1}{2}} = 1$$

中間状態は、課題を満足する状態の重ね合わせになっている。



プログラミング



2.2. Shorのアルゴリズムの分析

数論的前置き

複合数 N を素因数分解するには、まずその因数を1つ見つけ、 N をそれで割り、あとはこれを繰り返す。

N と x の最大公約数 $\gcd(N,x)$ をユークリッドの互除法で計算する。それが1でなければ因数が見つかったわけだから問題は解決したことになる。

因数を見つけるために、 N より小さい整数 x を選んで $\gcd(N,x)=1$ ならば x は N と互いに素であることに注意して以下に進む。

N と互いに素であるような x に対して

$$x^r = 1 \pmod{N}$$

となる偶数 r が存在する。上の式を書き直すと

$$(x^{r/2} + 1)(x^{r/2} - 1) = \text{integer} \times N$$

したがって $(x^{r/2} + 1)$ か $(x^{r/2} - 1)$ のどちらかは、 N の因子を含む。

したがって、問題は $x^a \pmod{N}$ の a についての 周期 r を求めることに帰着される。

中間状態 $|\psi\rangle$ の選択：trial

q を充分大きな数として

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{a=0}^{q-1} |a\rangle |x^a\rangle$$

ただし、 $|x^a\rangle := |x^a \bmod N\rangle$ と略記した。

$$|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{a=0}^{q-1} |a\rangle |1\rangle$$

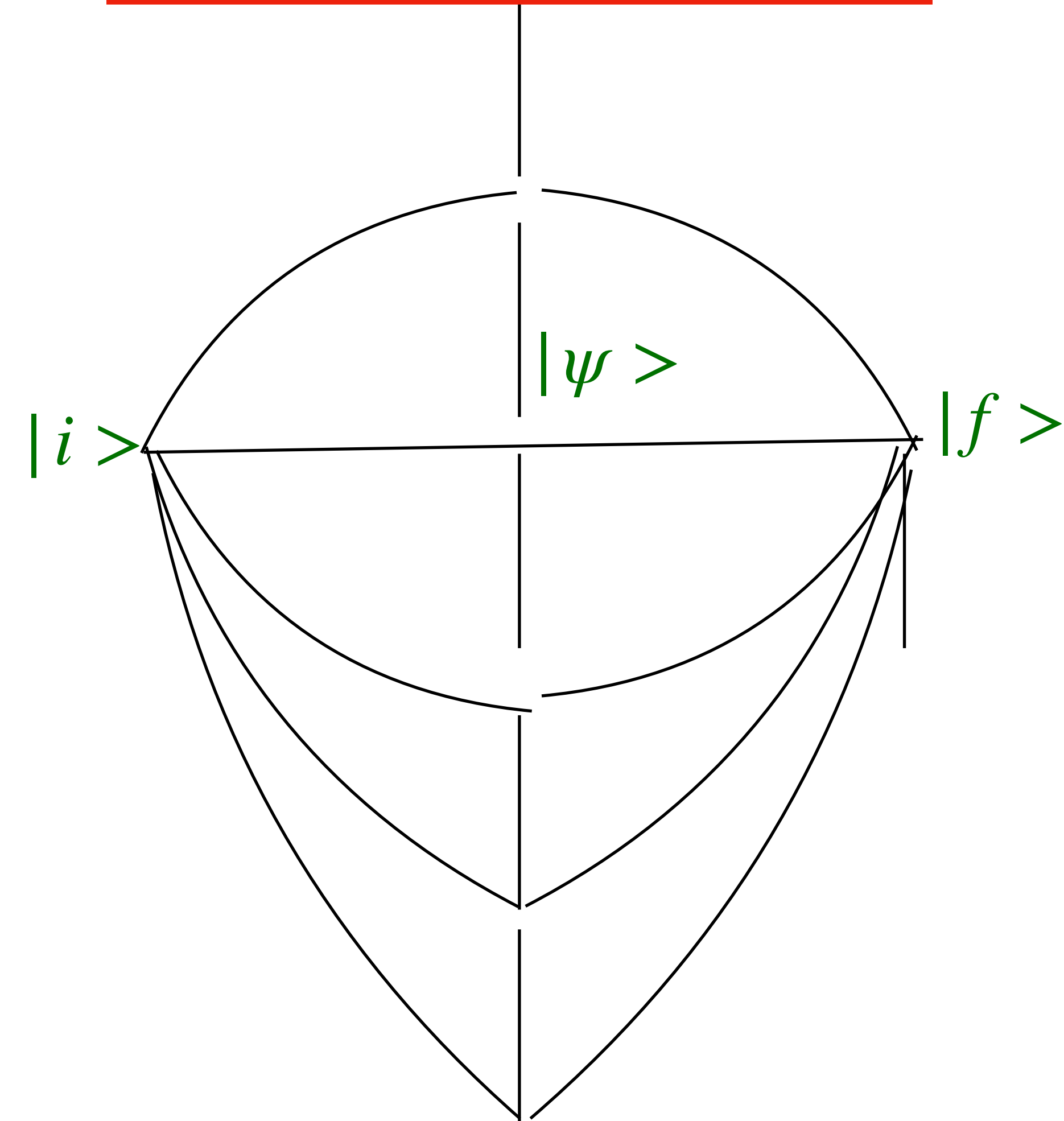
$$|f\rangle = |a^*\rangle |x^{a^*} = 1\rangle$$

として、擬確率を計算しよう。

$$\frac{\langle f|\psi\rangle \langle \psi|i\rangle}{\langle f|i\rangle} = \frac{\frac{1}{\sqrt{q}} \frac{1}{r}}{\frac{1}{\sqrt{q}}} = \frac{1}{r}$$

r は 1 のオーダーだから、そう悪くない。

r 個のスリットのうちどれかを通った



フーリエ変換

$$|\tilde{\psi}\rangle = \frac{1}{q} \sum_{a=0, c=0}^{q-1} |c\rangle^* e^{\frac{2\pi i}{q}ca} |x^a\rangle$$

$$\frac{q}{r} \rightarrow \left[\frac{q}{r} \right]$$

Integer part

$$|\tilde{\psi}\rangle = \frac{1}{q} \sum_{c=0}^{q-1} |c\rangle^* \sum_{b=0}^{\frac{b}{r}-1} \sum_{\alpha=0}^{r-1} e^{\frac{2\pi i}{q}c(br+\alpha)} |x^\alpha\rangle = |0\rangle^* \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{\alpha=0}^{r-1} |x^\alpha\rangle$$

$$|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{a=0}^{q-1} |a\rangle |1\rangle = |0\rangle^* |1\rangle$$

$$|f\rangle = |\hat{a}\rangle \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{\alpha=0}^{r-1} |x^\alpha\rangle$$

$$\frac{\langle f|\tilde{\psi}\rangle \langle \tilde{\psi}|i\rangle}{\langle f|i\rangle} = \frac{\frac{1}{\sqrt{q}} \frac{1}{\sqrt{r}}}{\frac{1}{\sqrt{qr}}} = 1$$

量子状態

$$|\tilde{\psi}\rangle = \frac{1}{q} \sum_{a=0, c=0}^{q-1} |c\rangle^* e^{\frac{2\pi i}{q}ca} |x^a\rangle$$

を量子回路で作る。

$$|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{a=0}^{q-1} |a\rangle |1\rangle \rightarrow |\tilde{\psi}\rangle = \frac{1}{q} \sum_{a=0, c=0}^{q-1} |c\rangle^* e^{\frac{2\pi i}{q}ca} |x^a\rangle$$

P.W.Shor,

Proceeding of the 37th Annual Symposium on Found

IEEE Computer Society Press, Los Alamits,CA, pp. 56

A. Ekert and R. Jozsa Rev. Mod. Phys. 68 733(1996).

まとめ

標準的な状態 $|i\rangle$ から出発して、課題に動機づけられた entangled state $|\psi\rangle$ を測定し、 $|f\rangle$ を得るとする。

$$|i\rangle \rightarrow |\tilde{\psi}\rangle \rightarrow |f\rangle$$

そして、

射影演算子 $|\tilde{\psi}\rangle\langle\tilde{\psi}|$ の弱値 = $|\tilde{\psi}\rangle$ を得る擬確率が 1 であるようにする。

$|\tilde{\psi}\rangle$ を効率的に作るには：

量子回路については A. Ekert and R. Jozsa Rev. Mod. Phys. 68 733(1996)

QCの物理系が与えられた時

Time-Optimal Quantum Evolution

Alberto Carlini, Akio Hosoya, Tatsuhiko Koike, and Yosuke Okudaira

Phys. Rev. Lett. **96**, 060503 – Published 15 February 2006

これまでのところ量子力学は人間的な言葉で書かれていない。
一方、有用なアルゴリズムの課題は人間の言葉で語られる。

このギャップを埋めることを考えたい。ヒントとなるのは、量子光学の実験家たちが使っている経験則：

測定器から遡って経路が一意に定まる時には
干渉縞はできない。

これを、擬確率（アハラノフの弱値）の言葉で、擬確率 = 1 と翻訳した。

量子アルゴリズムについての提案

課題を忠実にエンタングル状態 $|\psi\rangle$ で表現する。（一意でなく）一般にユニタリー変換分の任意性がある： $|\psi\rangle = U|\tilde{\psi}\rangle$

その中で、射影演算子 $|\tilde{\psi}\rangle\langle\tilde{\psi}|$ の弱値 = 1 のものを採用する。

