非有界保存量の存在下での射影測定ならびにユニタリーチャンネルに対するWigner-Araki-Yanase 定理

倉持結
共同研究者：田島裕康

2024 年 3 月 11 日

YK and Hiroyasu Tajima, PRL **131**, 210201 (2023)

背景：WAY 定理

- 加法的保存則 (エネルギー，(角) 運動量，etc.) は実装可能な量子測定のクラスに制限を与える．

- Wigner-Araki-Yanase (WAY) 定理：

  Wigner (1952), Araki-Yanase (1960), Yanase (1961), Ozawa (1991)

  保存則および反復可能性またはプローブ系の測定と保存量との可換性 (Yanase 条件) の条件下では，保存量と非可換な射影測定を実装することは不可能．

- ほとんどの WAY 定理の既存の証明では，被測定系の有限次元性または保存量の有界性を仮定．

背景：非有界 WAY 定理に関する先行研究

- Stein-Shimony (1971), Ghirardi et al. (1983)：
  保存量や測定モデルに技術的な仮定を課しており，
  運動量保存などの物理的に重用な例に適用不能.

- Ozawa (1991), Busch-Loveridge (2011)：
  運動量保存の下での位置の測定の考察.
  Busch-Loveridge (2011) では，位置の測定の精度とプローブ系の運動量の分散 (コヒーレンス) との間の WAY 型のトレードオフ関係を導出したが，誤差のない位置の射影測定を実装できる可能性を排除できない.

本研究の概要

- 一般に非有界な保存量に対する WAY 定理を，Yanase 条件の下で証明した．
- 一般に非有界な保存量がある場合のユニタリーチャンネルの実装に対する類似の WAY 型の no-go 定理を証明した．

本講演ではこれらの概要を解説する．

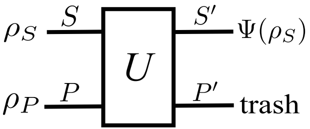
設定と定義：系-環境モデル

$\mathbb{M} = (S, P, S', P', \rho_P, U)$ が系-環境モデル $:\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$

- S, P, S', P': 量子系，
- ρ_P: $\mathcal{H}_P$ 上の密度作用素 (量子状態)，
- $U : \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_P \to \mathcal{H}_{S'} \otimes \mathcal{H}_{P'}$: ユニタリー写像．

$\mathbb{M}$ が量子チャンネル $\Psi : \mathbf{T}(\mathcal{H}_S) \to \mathbf{T}(\mathcal{H}_{S'})$ を実装する

$$:\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \Psi(\rho_S) = \mathrm{Tr}_{P'}[U(\rho_S \otimes \rho_P)U^\dagger] \quad (\rho_S \in \mathbf{T}(\mathcal{H}_S)),$$



任意の量子チャンネルはある系-環境モデルによる実装を有する．

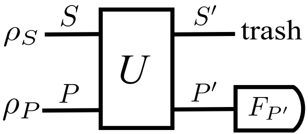
設定と定義：間接測定モデル

$\mathbb{M} = (S, P, S', P', \rho_P, U, \mathsf{F}_{P'})$ が間接測定モデル $:\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$

- $(S, P, S', P', \rho_P, U)$ が系-環境モデル．
- $\mathsf{F}_{P'} : \Sigma \to \mathbf{B}(\mathcal{H}_{P'})$: 標本空間 (Ω, Σ) 上で定義された $\mathcal{H}_{P'}$ 上の POVM(プローブ POVM)．

間接測定モデル $\mathbb{M}$ が $\mathcal{H}_S$ 上の POVM E_S を実装する $:\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$

$$\mathsf{E}_S(X) = \mathrm{Tr}_P[(\mathbb{1}_S \otimes \rho_P)U^\dagger(\mathbb{1}_{S'} \otimes \mathsf{F}_{P'}(X))U] \quad (\forall X \in \Sigma).$$



非有界自己共役作用素

- 位置や運動量といった非有界自己共役作用素 L_S は定義域 $\mathrm{dom}(L_S)$ が全空間 $\mathcal{H}_S$ の (稠密な) 真部分空間となり繊細な取り扱いが必要.
- その代わりに有界な作用素である，L_S のスペクトル測度 E^{L_S} または L_S に付随する 1 パラメータユニタリー群 $(e^{itL_S})_{t\in\mathbb{R}}$ を用いることも多い.
今回の証明では後者を用いた.

非有界自己共役作用素：可換性

L_S を $\mathcal{H}_S$ 上の自己共役作用素とする．
有界作用素 $a \in \mathbf{B}(\mathcal{H}_S)$ と L_S が可換

$$
\begin{aligned}
&\overset{\text{def.}}{:\Leftrightarrow} a\mathsf{E}^{L_S}(B) = \mathsf{E}^{L_S}(B)a \quad (\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})) \\
&\Longleftrightarrow \ e^{itL_S}a = ae^{itL_S} \quad (\forall t \in \mathbb{R}).
\end{aligned}
$$

ここで $\mathsf{E}^{L_S}(\cdot)$ は L_S のスペクトル測度，すなわち
$\mathsf{E}^{L_S} : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbf{B}(\mathcal{H}_S)$ は

$$
L_S = \int_{\mathbb{R}} \lambda d\mathsf{E}^{L_S}(\lambda)
$$

なる PVM である．
たとえば，L_S が位置作用素 $\hat{x}$ のとき

$$
\mathsf{E}^{\hat{x}}(B) = \int_B |x\rangle \langle x| \, dx, \quad \langle x|y\rangle = \delta(x-y).
$$

主結果 1：射影測定に対する WAY 定理

定理 1

間接測定モデル $\mathbb{M} = (\mathcal{H}_P, \mathcal{H}_{S'}, \mathcal{H}_{P'}, \rho_P, U, \mathsf{F}_{P'})$ が $\mathcal{H}_S$ 上の PVM $(\Omega, \Sigma, \mathsf{E}_S)$ を実装するとする．

L_S, L_P, $L_{S'}$, $L_{P'}$: $\mathcal{H}_S$, $\mathcal{H}_P$, $\mathcal{H}_{S'}$, $\mathcal{H}_{P'}$ に作用する自己共役作用素で以下を満たすとする：

1. (保存則)

$$U^\dagger L_{S'P'} U = L_{SP}.$$

ここで

$$L_{SP} := L_S \otimes \mathbb{1}_P + \mathbb{1}_S \otimes L_P,$$
$$L_{S'P'} := L_{S'} \otimes \mathbb{1}_{P'} + \mathbb{1}_{S'} \otimes L_{P'}.$$

2. (Yanase 条件) $\mathsf{F}_{P'}(X)$ と $L_{P'}$ が可換 $(\forall X \in \Sigma)$．

このとき任意の $X \in \Sigma$ に対して $\mathsf{E}_S(X)$ は L_S と可換である．

証明：乗法域 (multiplicative domain)

定義 1

Unital CP 写像 $\Lambda\colon \mathrm{B}(\mathcal{H}_A) \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_B)$ の**乗法域** $\mathcal{M}_\Lambda$ を

$$\Lambda(a^\dagger a) = \Lambda(a^\dagger)\Lambda(a),\ \Lambda(aa^\dagger) = \Lambda(a)\Lambda(a^\dagger)$$

を満たす $a \in \mathrm{B}(\mathcal{H}_A)$ の全体とする．

証明：乗法域

補題 1

Unital CP 写像 $\Lambda\colon \mathrm{B}(\mathcal{H}_A) \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_B)$ に対して以下の主張が成立する．

1. Schwarz 不等式

$$\Lambda(a^\dagger a) \geq \Lambda(a^\dagger)\Lambda(a) \tag{1}$$

が任意の $a \in \mathrm{B}(\mathcal{H}_A)$ に対して成立する．

2. 有界作用素 $a \in \mathrm{B}(\mathcal{H}_A)$ に対して，$a \in \mathcal{M}_\Lambda$ なるための必要十分条件は

$$\Lambda(ba) = \Lambda(b)\Lambda(a), \quad \Lambda(ab) = \Lambda(a)\Lambda(b) \tag{2}$$

が任意の $b \in \mathrm{B}(\mathcal{H}_A)$ 対して成立することである．

証明

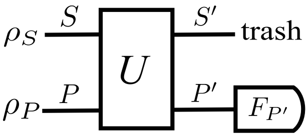
任意の可測集合 $X \in \Sigma$ を固定して議論する．Goal は $\mathsf{E}_S(X)$ と e^{itL_S} とが任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して交換することを示すこと．Unital CP 写像 $\Lambda\colon \mathbf{B}(\mathcal{H}_{S'} \otimes \mathcal{H}_{P'}) \to \mathbf{B}(\mathcal{H}_S)$ を

$$\Lambda(a) := \mathrm{Tr}_P[(\mathbb{1}_S \otimes \rho_P)U^\dagger a U] \quad (a \in \mathbf{B}(\mathcal{H}_{S'} \otimes \mathcal{H}_{P'})). \tag{3}$$

で定める．間接測定モデル $\mathbb{M}$ は PVM E_S を実装するので

$$\begin{aligned} \mathsf{E}_S(X) &= \mathrm{Tr}_P[(\mathbb{1}_S \otimes \rho_P)U^\dagger(\mathbb{1}_{S'} \otimes \mathsf{F}_{P'}(X))U] \\ &= \Lambda(\mathbb{1}_{S'} \otimes \mathsf{F}_{P'}(X)). \end{aligned} \tag{4}$$

が成立する．



証明

これより

$$
\begin{aligned}
&\Lambda(\mathbb{1}_{S'} \otimes \mathsf{F}_{P'}(X))^2 \\
&= \mathsf{E}_S(X)^2 \quad (\because \text{式 (4)}) \\
&= \mathsf{E}_S(X) \quad (\because \mathsf{E}_S(X) \text{ は射影}) \\
&= \Lambda(\mathbb{1}_{S'} \otimes \mathsf{F}_{P'}(X)) \quad (\because \text{式 (4)}) \\
&\geq \Lambda((\mathbb{1}_{S'} \otimes \mathsf{F}_{P'}(X))^2) \quad (\because \mathbb{1}_{S'} \otimes \mathsf{F}_{P'}(X) \geq (\mathbb{1}_{S'} \otimes \mathsf{F}_{P'}(X))^2) \\
&\geq \Lambda(\mathbb{1}_{S'} \otimes \mathsf{F}_{P'}(X))^2 \quad (\because \text{Schwarz 不等式 (1)}).
\end{aligned} \tag{5}
$$

従って，式 (5) における不等号は等号でなければならず，よって $\mathbb{1}_{S'} \otimes \mathsf{F}_{P'}(X) \in \mathcal{M}_\Lambda$ である．

証明

保存則により，任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned}\Lambda(e^{itL_{S'}} \otimes e^{itL_{P'}}) &= \mathrm{Tr}_P[(\mathbb{1}_S \otimes \rho_P)U^\dagger e^{itL_{S'P'}} U] \\ &= \mathrm{Tr}_P[(\mathbb{1}_S \otimes \rho_P)e^{itL_{SP}}] \\ &= \mathrm{Tr}_P[(\mathbb{1}_S \otimes \rho_P)(e^{itL_S} \otimes e^{itL_P})] \\ &= \mathrm{Tr}[\rho_P e^{itL_P}]e^{itL_S}. \end{aligned} \tag{6}$$

これより任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}[\rho_P e^{itL_P}]\mathsf{E}_S(X)e^{itL_S} \\ &= \Lambda(\mathbb{1}_{S'} \otimes \mathsf{F}_{P'}(X))\Lambda(e^{itL_{S'}} \otimes e^{itL_{P'}}) \ (\because \text{式 (4) および (6)}) \\ &= \Lambda((\mathbb{1}_{S'} \otimes \mathsf{F}_{P'}(X))(e^{itL_{S'}} \otimes e^{itL_{P'}})) \ (\because \mathbb{1}_{S'} \otimes \mathsf{F}_{P'}(X) \in \mathcal{M}_\Lambda) \\ &= \Lambda((e^{itL_{S'}} \otimes e^{itL_{P'}})(\mathbb{1}_{S'} \otimes \mathsf{F}_{P'}(X))) \ (\because \text{Yanase 条件}) \\ &= \Lambda(e^{itL_{S'}} \otimes e^{itL_{P'}})\Lambda(\mathbb{1}_{S'} \otimes \mathsf{F}_{P'}(X)) \ (\because \mathbb{1}_{S'} \otimes \mathsf{F}_{P'}(X) \in \mathcal{M}_\Lambda) \\ &= \mathrm{Tr}[\rho_P e^{itL_P}]e^{itL_S}\mathsf{E}_S(X) \ (\because \text{式 (4) および (6)}). \end{aligned} \tag{7}$$

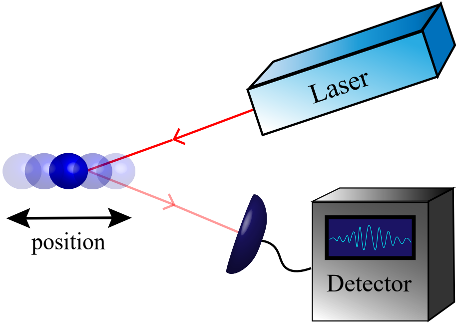
証明

$$\mathrm{Tr}[\rho_P e^{itL_P}]\mathsf{E}_S(X)e^{itL_S} = \mathrm{Tr}[\rho_P e^{itL_P}]e^{itL_S}\mathsf{E}_S(X) \qquad (7)$$

いま，1 パラメータユニタリ群 $(e^{itL_P})_{t\in\mathbb{R}}$ の強連続性により関数 $\varphi(t) := \mathrm{Tr}[\rho_P e^{itL_P}]$ は $t \in \mathbb{R}$ について連続である．
$\varphi(0) = 1 \neq 0$ であるから十分小さい $\delta > 0$ を取れば $\varphi(t) \neq 0$ が任意の $t \in (-\delta, \delta)$ に対して成立する．よって式 (7) より任意の $t \in (-\delta, \delta)$ に対して $\mathsf{E}_S(X)$ と e^{itL_S} は可換である．任意の $t \in \mathbb{R}$ に対しては自然数 n を十分大きく取り，
$t/n \in (-\delta, \delta)$ なるようにすると $\mathsf{E}_S(X)$ と $e^{i\frac{t}{n}L_S}$ は可換なので，$\mathsf{E}_S(X)$ と $e^{itL_S} = (e^{i\frac{t}{n}L_S})^n$ も可換である．故に $\mathsf{E}_S(X)$ は L_S と可換である． □

WAY 定理の応用 1

- WAY 定理より，運動量保存則および Yanase 条件を満たすいかなる間接測定モデルも位置の射影測定を実装しない．



WAY 定理の応用 2：量子光学系

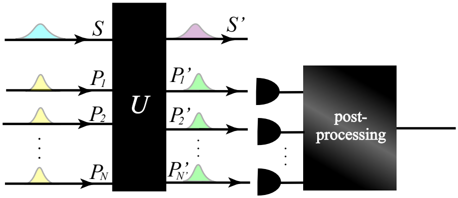
被測定系が 1 モード光子場のとき，全系の光子数

$$\hat{n}_S + \hat{n}_{P_1} + \cdots + \hat{n}_{P_N}$$

が保存するようなユニタリー (e.g. ビームスプリッターと位相シフター) および光子数計数測定をどのように組み合わせても，直交位相振幅

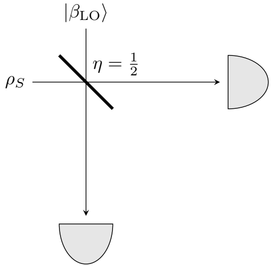
$$\hat{x}_{S,\theta} = \frac{1}{2}(e^{-i\theta}\hat{a}_S + e^{i\theta}\hat{a}_S^\dagger)$$

の射影測定は誤差なく実装できない．



WAY 定理の応用 2：量子光学系

近似的な直交位相振幅の測定は，下図のホモダイン測定において $\beta_{\mathrm{LO}} \to \infty$ で近似的に実装される．



ここで $|\beta_{\mathrm{LO}}\rangle = e^{-\beta_{\mathrm{LO}}^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_{\mathrm{LO}}^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle_{\mathrm{LO}}$local oscillator のコヒーレント状態

ユニタリーチャンネルに対する WAY 型定理

定理 2

$U_{S\to S'}: \mathcal{H}_S \to \mathcal{H}_{S'}$: ユニタリー写像,
$\mathcal{U}_{S\to S'}: \mathbf{T}(\mathcal{H}_S) \ni \rho_S \to U_{S\to S'}\rho_S U^\dagger_{S\to S'} \in \mathbf{T}(\mathcal{H}_{S'})$,
$(\mathcal{H}_S, \mathcal{H}_P, \mathcal{H}_{S'}, \mathcal{H}_{P'}, \rho_P, U)$: $\mathcal{U}_{S\to S'}$ を実装する系-環境モデル,
$L_{S,P,S',P'}$: $\mathcal{H}_{S,P,S',P'}$ 上の自己共役作用素で，保存則を満たす：

$$U^\dagger L_{S'P'}U = L_{SP}.$$

このときある実数 $\gamma \in \mathbb{R}$ が存在して

$$U^\dagger_{S\to S'}L_{S'}U_{S\to S'} = L_S + \gamma \mathbb{1}_S.$$

更に，$\mathcal{H}_S = \mathcal{H}_{S'}$，$L_S = L_{S'}$ および L_S が半有界 (スペクトルが上または下に有界) であると仮定すると，$U_S := U_{S\to S'}$ は L_S と可換である．

定理 2 の後半の主張の証明

前半の主張より

$$U_S^\dagger L_S U_S = L_S + \gamma \mathbb{1}_S.$$

L_S のスペクトル集合 $\sigma(L_S) \subseteq \mathbb{R}$ と $U_S^\dagger L_S U_S$ のスペクトル集合は一致するので上式より

$$\sigma(L_S) = \sigma(L_S) + \gamma \quad (= \{\, \lambda + \gamma \mid \lambda \in \sigma(L_S) \,\}).$$

L_S が下に有界だとすると，両辺の $\inf$ が一致しなければならないので

$$\mathbb{R} \ni \inf \sigma(L_S) = \inf \sigma(L_S) + \gamma$$

より $\gamma = 0$. よって U_S と L_S は可換．
L_S が上に有界な場合も同様．

まとめとコメント

- 射影測定およびユニタリーチャンネルの実装に関する WAY 定理を非有界な保存量に対して証明した．
- 2 つの定理において，$(e^{itL})_{t\in\mathbb{R}}$ を連結位相群 G の強連続ユニタリー表現 $(U_g)_{g\in G}$ に一般化した定理も成立する (論文の supplementary material 参照).
- 反復可能性条件の下で WAY 定理が非有界な保存量に対して成り立つかは open problem.
- 今回の exact な実装に関する no-go 定理を，近似的な実装に関する定量的なトレードオフ関係に一般化するのは今後の課題．

群対称性と射影測定に対する WAY 定理

定理 3

$\mathbb{M} = (\mathcal{H}_P, \mathcal{H}_{S'}, \mathcal{H}_{P'}, \rho_P, U, \mathsf{F}_{P'})$： S 上の PVM $(\Omega, \Sigma, \mathsf{E}_S)$ 実装する間接測定モデル．

G: 連結位相群．

$(U_g^S)_{g\in G}$, $(U_g^P)_{g\in G}$, $(U_g^{S'})_{g\in G}$, $(U_g^{P'})_{g\in G}$: $\mathcal{H}_S$, $\mathcal{H}_P$, $\mathcal{H}_{S'}$, $\mathcal{H}_{P'}$ 上の G の強連続ユニタリー表現 s.t.

- (G-不変性)

$$U^\dagger (U_g^{S'} \otimes U_g^{P'}) U = U_g^S \otimes U_g^P \quad (g \in G). \tag{8}$$

- (一般化された Yanase 条件) $\mathsf{F}_{P'}(X)$ と $U_g^{P'}$ は可換 $(\forall X \in \Sigma,\ \forall g \in G)$.

このとき $\mathsf{E}_S(X)$ と U_g^S は可換 $(\forall X \in \Sigma,\ \forall g \in G)$.

群対称性とユニタリーチャンネルに対する WAY 定理

定理 4

$U_{S\to S'}\colon \mathcal{H}_S \to \mathcal{H}_{S'}$：ユニタリー写像．
$\mathcal{U}_{S\to S'}\colon \mathbf{T}(\mathcal{H}_S) \ni \rho_S \mapsto U_{S\to S'}\rho_S U_{S\to S'}^\dagger \to \mathbf{T}(\mathcal{H}_{S'})$.
$\mathbb{M} = (\mathcal{H}_P, \mathcal{H}_{S'}, \mathcal{H}_{P'}, \rho_P, U)$: $\mathcal{U}_{S\to S'}$ を実装する系-環境モデル．
G: 連結位相群．$(U_g^S)_{g\in G}$，$(U_g^P)_{g\in G}$，$(U_g^{S'})_{g\in G}$，$(U_g^{P'})_{g\in G}$: $\mathcal{H}_S$，$\mathcal{H}_P$，$\mathcal{H}_{S'}$，$\mathcal{H}_{P'}$ 上の G の強連続ユニタリー表現で，以下の G-不変性を満たす：

$$U^\dagger(U_g^{S'} \otimes U_g^{P'})U = U_g^S \otimes U_g^P \quad (g \in G).$$

このとき 1 次元連続ユニタリー表現 $G \ni g \mapsto c_g \in \mathrm{U}(1)$ が存在して

$$U_{S\to S'}^\dagger U_g^{S'} U_{S\to S'} = c_g U_g^S \quad (g \in G). \tag{9}$$

スペクトル集合

$L\colon \mathrm{dom}(L) \to \mathcal{H}$ を稠密な定義域 $\mathrm{dom}(L)$ を有する作用素とする．
$(\lambda\mathbb{1} - L)$ の有界な逆作用素 $(\lambda\mathbb{1} - L)^{-1}$ が存在しないような $\lambda \in \mathbb{C}$ の集合 $\sigma(L)$ を L のスペクトル集合という．
スペクトル集合は $\mathbb{C}$ の閉部分集合．
$\dim \mathcal{H} < \infty$ ならば $\sigma(L)$ は L の固有値の集合．
L が自己共役ならば $\sigma(L) \subseteq \mathbb{R}$.

非有界自己共役作用素：数学的定義

- L_S: $\mathcal{H}_S$ 上の稠密な部分空間 $\mathrm{dom}(L_S)$ を定義域とする線形作用素 $L_S\colon \mathrm{dom}(L_S) \to \mathcal{H}_S$.
- 共役作用素 $L_S^\dagger$ は定義域 $\mathrm{dom}(L_S^\dagger)$ を

$$\exists \psi' \in \mathcal{H}_S \text{ s.t.} \forall \phi \in \mathrm{dom}(L_S)\ \langle \psi | L_S \phi \rangle = \langle \psi' | \phi \rangle$$

  なる $\psi \in \mathcal{H}_S$ よりなる集合で定め，$L_S^\dagger \psi := (\text{上記の } \psi')$.
- L_S が自己共役 $:\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $L_S = L_S^\dagger$.
  すなわち，$\mathrm{dom}(L_S) = \mathrm{dom}(L_S^\dagger)$ かつ $L_S\psi = L_S^\dagger \psi$ $(\forall \psi \in \mathrm{dom}(L_S) = \mathrm{dom}(L_S^\dagger))$.

非有界自己共役作用素：スペクトル測度

$\mathcal{H}_S$ 上の自己共役作用素 L_S に対して PVM
$\mathsf{E}^{L_S}: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbf{B}(\mathcal{H}_S)$ が一意に存在して

$$\mathrm{dom}(L_S) = \left\{ \psi \in \mathcal{H}_S \,\middle|\, \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 d \left\langle \psi | \mathsf{E}^{L_S}(\lambda) \psi \right\rangle < \infty \right\},$$

$$\langle \phi | L_S \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \lambda d \left\langle \phi | \mathsf{E}^{L_S}(\lambda) \psi \right\rangle \quad (\phi \in \mathcal{H}_S,\ \psi \in \mathrm{dom}(L_S)).$$

逆に PVM $\mathsf{E}^{L_S}: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbf{B}(\mathcal{H}_S)$ が与えられると上記条件により $\mathcal{H}_S$ 上の自己共役作用素 L_S が一意に定まる．このような PVM E^{L_S} を L_S のスペクトル測度と呼び，記号的に $L_S = \int_{\mathbb{R}} \lambda d\mathsf{E}^{L_S}(\lambda)$ と書く．
有界可測関数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ に対して $f(L_S) := \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d\mathsf{E}^{L_S}(\lambda)$ と定める．

非有界自己共役作用素：1 パラメータユニタリ群

自己共役作用素 L_S に対して，$(U_t = e^{itL_S})_{t\in\mathbb{R}}$ は L_S に付随する 1 パラメータユニタリ群と呼ばれ，以下を満たす：

(i) (強連続性)．$\mathbb{R} \ni t \mapsto U_t \in \mathbf{B}(\mathcal{H}_S)$ は強作用素位相について連続である，すなわち任意の $\psi \in \mathcal{H}_S$ と $t_0 \in \mathbb{R}$ に対して $\|(U_t - U_{t_0})\psi\| \xrightarrow{t\to t_0} 0$.

(ii) (ユニタリ性)．任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して U_t はユニタリである (i.e. $U_t^\dagger U_t = U_t U_t^\dagger = \mathbb{1}_S$).

(iii) (群準同型性)．$U_{t+s} = U_t U_s$ $(\forall t, s \in \mathbb{R})$.

連続群論の言葉でこれらの条件をまとめると，$\mathbb{R} \ni t \mapsto U_t$ は加法群 $\mathbb{R}$ の強連続なユニタリ表現であるということになる．
逆に $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ が $\mathcal{H}_S$ 上の $\mathbb{R}$ の強連続なユニタリ表現ならば，$\mathcal{H}_S$ 上の自己共役作用素 L_S が一意に存在して $U_t = e^{itL_S}$ $(t \in \mathbb{R})$ となる (Stone の定理)．

$\gamma \neq 0$ となる簡単な例

- $S = S'$ および $P = P'$ は 1 次元粒子とする．
- ρ_P は任意の状態．
- $L_S = p_S$, $L_P = p_P$ はそれぞれの系での運動量作用素．
- $U_S := e^{i\gamma x_S}$ (実装したいユニタリー)．x_S は位置作用素．このとき $U_S^\dagger p_S U_S = p_S + \gamma \mathbb{1}_S$.
- $U := e^{i\gamma x_S} \otimes e^{-i\gamma x_P}$.
- このとき，系-環境モデル (S, P, S, P, ρ_P, U) はユニタリーチャンネル $\mathcal{U}_S(\cdot) = U_S \cdot U_S^\dagger$ を実装する．
- 保存則が成立：

$$
\begin{aligned}
&U^\dagger(\hat{p}_S \otimes \mathbb{1}_P + \mathbb{1}_S \otimes \hat{p}_P)U \\
&= (\hat{p}_S + \gamma \mathbb{1}_S) \otimes \mathbb{1}_P + \mathbb{1}_S \otimes (\hat{p}_P - \gamma \mathbb{1}_P) \\
&= \hat{p}_S \otimes \mathbb{1}_P + \mathbb{1}_S \otimes \hat{p}_P
\end{aligned}
$$

スペクトル測度と１パラメーターユニタリ群との対応

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{E}^{L_S}((\alpha,\beta)) + \frac{1}{2}(\mathsf{E}^{L_S}(\{\alpha\}) + \mathsf{E}^{L_S}(\{\beta\})) \\
&= \operatorname*{uw\text{-}lim}_{c\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c} \frac{e^{-i\beta t} - e^{-i\alpha t}}{-it} e^{itL_S}\,dt
\end{aligned}
$$

$(\alpha < \beta)$