



# 量子誤り訂正の復号と相補性原理

中田 芳史

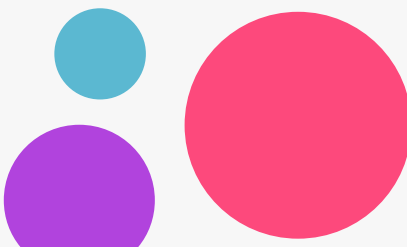
京都大学 基礎物理学研究所

松浦孝弥 (RMIT) ・小芦雅斗 (東京大学)

arXiv:2210.06661

2024年3月12日 @Quantum Foundations

- 1 **イントロダクション**
- 2 **非スタビライザ-符号のデコーダと相補性原理**
- 3 **デコーダの具体的な構成方法**
- 4 **まとめ**

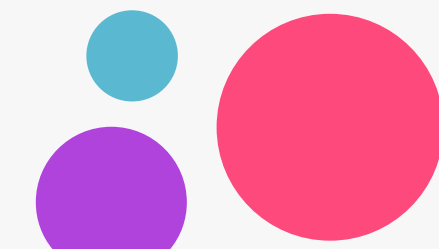


1 **イントロダクション**

2 非スタビライザ-符号のデコーダと相補性原理

3 デコーダの具体的な構成方法

4 まとめ

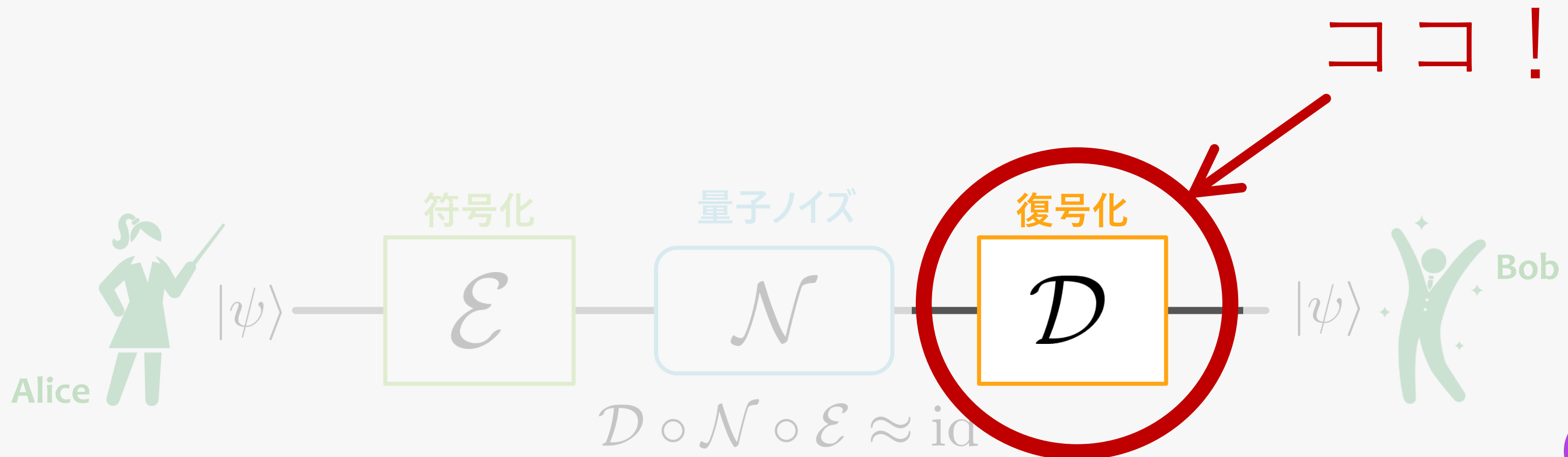


# イントロダクション

量子誤り訂正と、量子情報の復号化

## 量子誤り訂正とは？ 1

- 量子誤り訂正 = 「符号化」と「復号化」を用いて、量子ノイズを実効的にキャンセルする手法
  - 符号化 $\mathcal{E}$ と復号化(=デコーダ) $\mathcal{D}$ の組を、量子誤り訂正符号と呼ぶ。
  - 「デコーダ」の構成は、重要だが非自明な問題。



# イントロダクション

量子誤り訂正と、量子情報の復号化

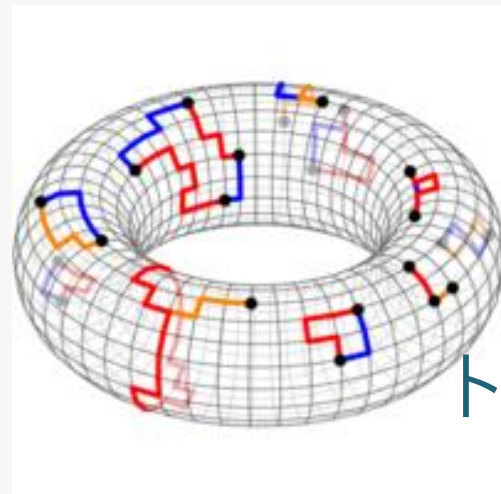
## 量子誤り訂正とは？ 2

このトークで考えること  
非スタビライザー符号をどうデコードすればよいか？

□ スタビライザー符号・・・“スタビライザー演算子”で定まる符号

➢ スタビライザー演算子を測定（＝シンドローム測定）し、その結果に基づいて、ZエラーとXエラーを独立に訂正する。

→原理的にはデコーダは自明（効率や性能のよい復号手法を見つけるのは非自明）



トーリック符号

CSS符号

Shorの9-qubit符号

HaPPY符号

量子誤り訂正符号

スタビライザー符号

非スタビライザー符号

ランダム符号化

ランダム行列理論

量子カオス

ユニタリ・デザイン

5-qubit符号

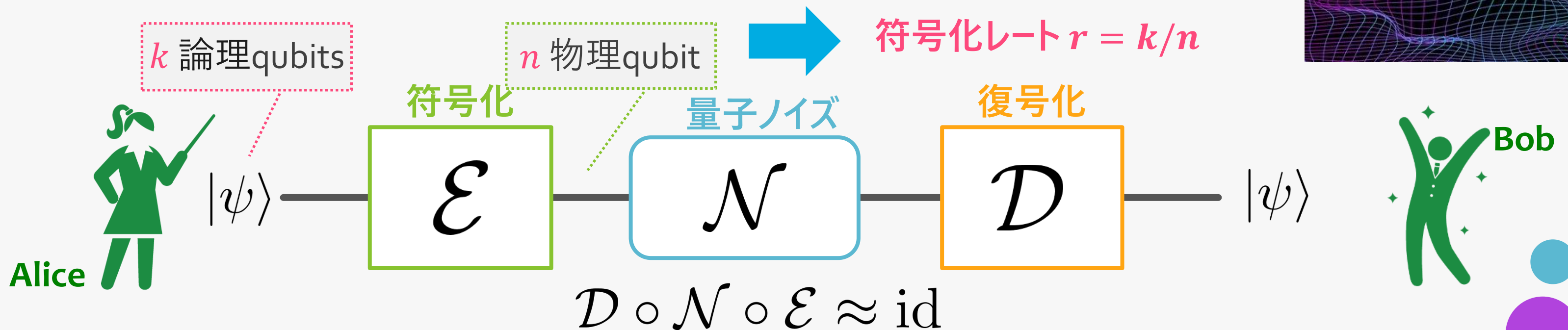
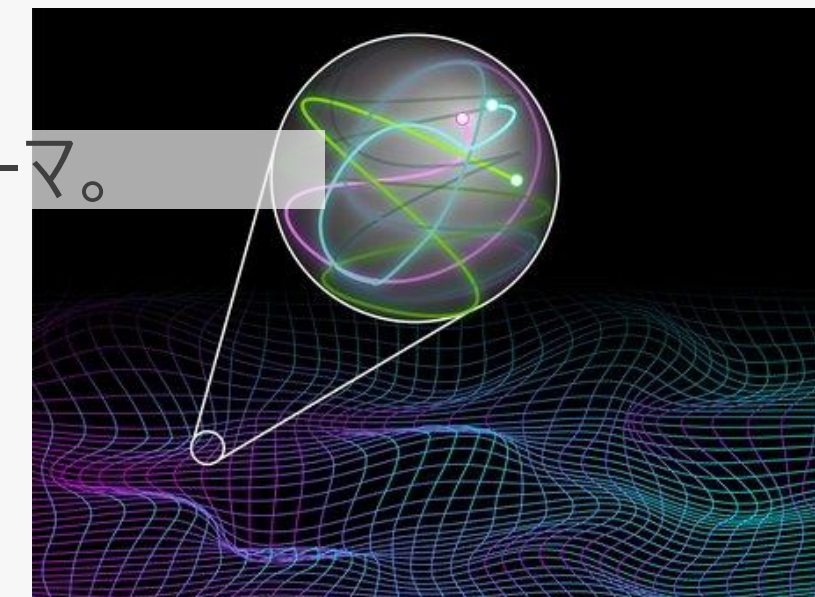
# イントロダクション

量子誤り訂正と、量子情報の復号化

## 非スタビライザー符号を考える動機

このトークで考えること  
非スタビライザー符号をどうデコードすればよいか？

1. **非スタビライザー符号**は、一般には**スタビライザー符号**よりも高い**符号化レート**を持つ。
  - 例：トーリック符号は、符号化レートは漸近的に0。
  - 最適な符号を用いれば、非ゼロの符号化レートを達成可能（量子通信容量）。
2. 理論物理で「**量子カオスと量子誤り訂正の関係**」が指摘されており、大きな研究テーマ。
  - その研究では、**非スタビライザー符号**が重要。



# イントロダクション

量子誤り訂正と、量子情報の復号化

## 非スタビライザー符号のデコーダ

[Barnum & Knill, JMP, 2002]

[Beigi, Datta, and Leditzky, JMP2016]

□ **非スタビライザー符号**にも適用できる**デコーダ**として、Petz復元写像が知られている。

➤ Petz写像によるデコーダを具体的に量子回路で実現するのは難しい。

□ “実用的”なデコーダを量子回路の形で構成したいが、**非スタビライザー符号**ではシンドローム測定が存在せず、一筋縄ではいかなさそう…。

### 本日のメイン・メッセージ

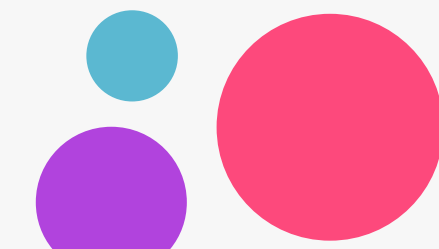
1. **スタビライザー符号のデコーディング手法**は任意の量子誤り訂正符号へと拡張可能で、**デコーディング量子回路**を具体的に構成できる。
2. **デコーダと相補性原理**の関係。

1 インTRODクシヨN

2 非スタビライザ-符号のデコ-ダと相補性原理

3 デコ-ダの具体的な構成方法

4 まとめ





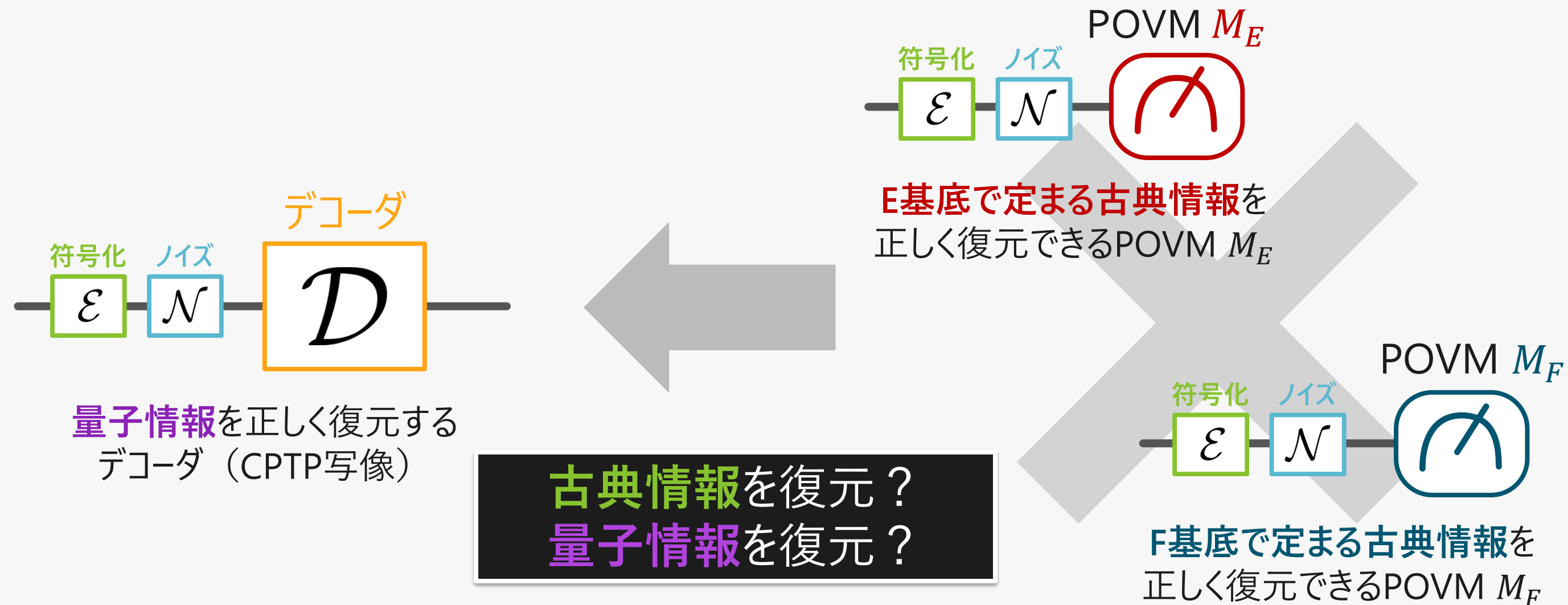
# 非スタビライザ符号のデコーダ

相補性原理の考えに基づく復号手法

## POVMから、量子デコーダを作る 1

c.f. スタビライザ符号の場合、  
シンδροーム測定からZエラーとXエラーを推定する。

- 一般の符号化とノイズに対するデコーダを作りたい。
  - 二つの基底で定まる二種類の古典情報をデコードするPOVMから、量子情報のデコーディング量子回路を構成する。



# 非スタビライザ符号のデコーダ

相補性原理の考えに基づく復号手法

## ノイズな量子系から情報を復元する 1

### □ 古典情報の復元

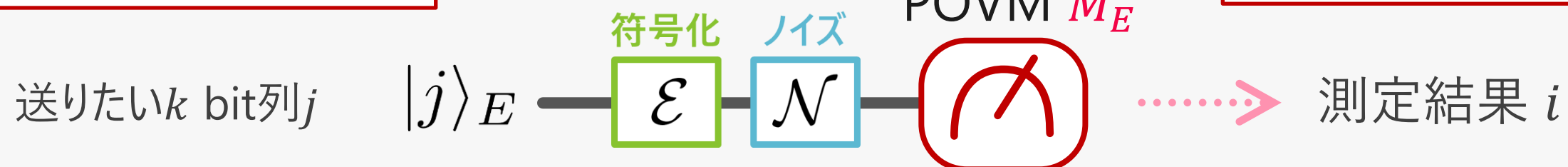
➤ 古典情報は基底に依存する。

※E基底状態以外に関しては、何も仮定しない。

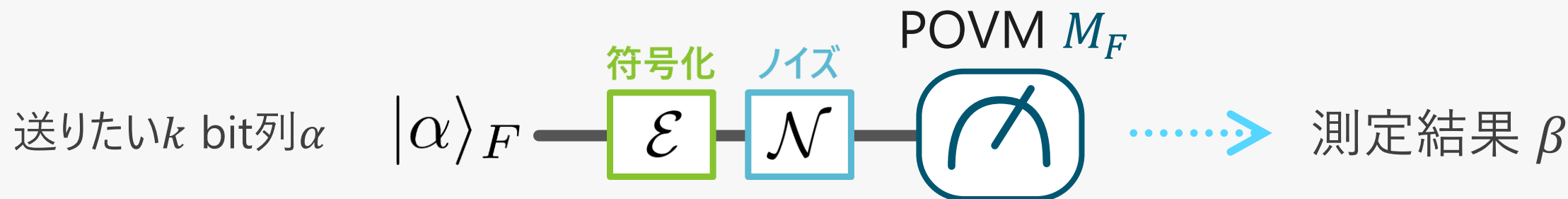
**E基底で定まる古典情報**の平均デコーディング・エラー

$$\Delta_E(M_E) := \text{平均}(i \neq j \text{の確率})$$

**E基底で定まる古典情報**



$i = j$ ならば、  
POVM  $M_E$ で古典情報jを復元できた。



$\beta = \alpha$ ならば、  
POVM  $M_F$ で古典情報 $\alpha$ を復元できた。

**F基底で定まる古典情報**

**F基底で定まる古典情報**の平均デコーディング・エラー

$$\Delta_F(M_F) := \text{平均}(\alpha \neq \beta \text{の確率})$$

※F基底状態以外に関しては、何も仮定しない。

# 非スタビライザ符号のデコーダ

相補性原理の考えに基づく復号手法

## ノイズな量子系から情報を復元する 2

### 量子情報の復元

- 最大エンタングル状態を用いて定義される。

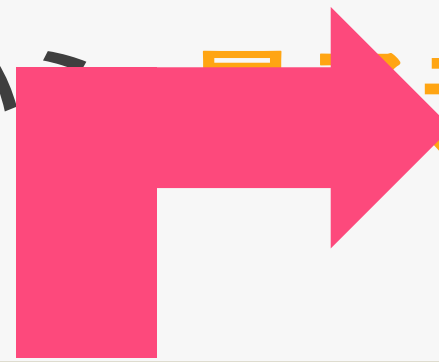


量子情報のデコーディング・エラー：
$$\Delta_Q := \frac{1}{2} \|\rho - |\Phi\rangle\langle\Phi|\|_1$$

# 非スタビライザ符号のデコーダ

相補性原理の考えに基づく復号手法

POVMが



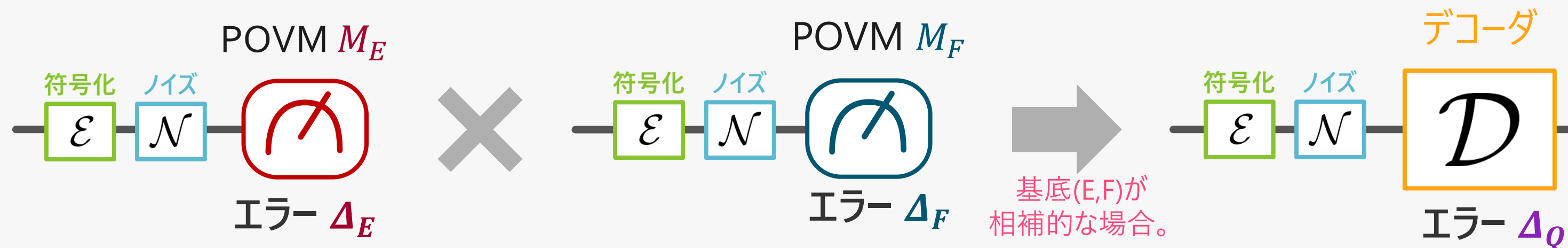
一般の量子誤り訂正符号でも、「相補的な基底で定まる二種類の古典情報」をデコードするPOVMが見つければ、量子情報をデコードする量子回路を構成できる。

## 定理

E基底で定まる古典情報をエラー $\Delta_E$ で復元するPOVM  $M_E$ と、F基底で定まる古典情報をエラー $\Delta_F$ で復元するPOVM  $M_F$ から量子的なデコーダ $\mathcal{D}$ を量子回路の形で具体的に構成でき、そのデコーダ $\mathcal{D}$ のデコーディング・エラー $\Delta_Q$ は、以下を満たす。

$$\Delta_Q \leq \sqrt{\Delta_E(2 - \Delta_E)} + \sqrt{\Delta_F} + \sqrt{\Xi(E, F)}$$

ここで、 $\Xi(E, F)$ は、二つの基底(E,F)の相補性を表す量で、(E,F)が相補的 (mutually-unbiased) の場合に $\Xi(E, F) = 0$ 。

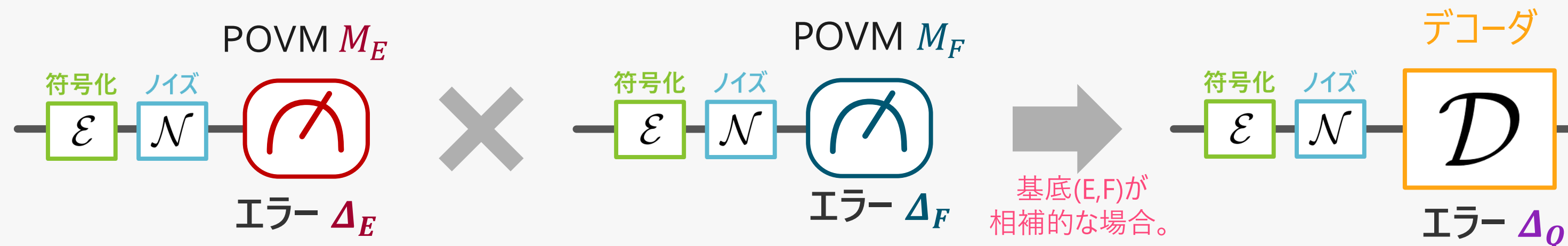


# 非スタビライザ符号のデコーダ

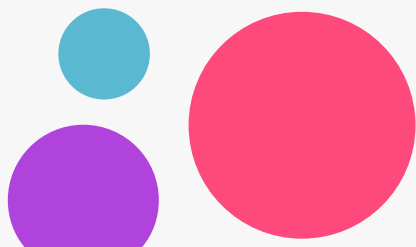
相補性原理の考えに基づく復号手法

## 今回の結果の意義

- 「量子情報のデコーダ = 量子状態の復元」に相補性が効いてくるのは自然。
  - 「量子系を完全に特徴付けるためには、相補的な情報 (e.g. 位置と運動量) を知る必要がある」
  - 意義 1 : 情報の復号化というタスクにおける「相補性」の重要性を特徴付ける結果。
- 最終的な目標 : 一般の量子誤り訂正符号のデコーダを、量子回路の形で具体的に作りたい！
  - 意義 2 : 目標を達成できてはいるが、「量子デコーダを作る」を、「古典情報を復元するPOVMを作る」に落とし込んだ。



- 1 イントロダクション
- 2 非スタビライザ-符号のデコーダと相補性原理
- 3 デコーダの具体的な構成方法**
- 4 まとめ



# 非スタビライザー符号のデコーダ

相補性原理の考え方に基づく復号手法

## デコーダの具体的な構成方法 1

今回の方針

CSS符号のデコーディング手法を、一般の量子誤り訂正符号へと拡張する。

例) Shorの9-qubit符号 = 1量子ビットの量子状態を、9量子ビットに符号化する手法

$$|\bar{0}\rangle_Z \propto (|000\rangle_Z + |111\rangle_Z)^{\otimes 3}$$

$$|\bar{1}\rangle_Z \propto (|000\rangle_Z - |111\rangle_Z)^{\otimes 3}$$

スタビライザー	●	●	●	●	●	●	●	●	エラー シンδροーム	
$S_1 =$	$Z_1$	$Z_2$							-1	
$S_2 =$		$Z_2$	$Z_3$						-1	
$S_3 =$									+1	
$S_4 =$									+1	
$S_5 =$						$Z_7$	$Z_8$		+1	
$S_6 =$							$Z_8$	$Z_9$	+1	
$S_7 =$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$			+1	
$S_8 =$				$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$	$X_8$	$X_9$	-1

このデコーディング手法はシンδροーム測定に依存しすぎていて、一般の量子誤り訂正符号に拡張しづらい...

古典デコーダ  $f_1$   
 → Z基底の情報を復号  
 どこかの物理qubitにXエラーが起こったか

古典デコーダ  $f_2$   
 → X基底の情報を復号  
 どこかの物理qubitにZエラーが起こったか



# 非スタビライザ符号のデコーダ

CSS符号の通常デコーディング

相補性原理の考えに基づく復号手法

例) Shorの9-qubit符号 = 1量子ビットの量子状態を、9量子ビットに符号化する手法

	●	●	●	●	●	●	●	●	●	
		X					Z			
スタビライザ										エラーシンドローム
$S_1 =$	$Z_1$	$Z_2$								-1
$S_2 =$		$Z_2$	$Z_3$							-1
$S_3 =$				$Z_4$	$Z_5$					+1
$S_4 =$					$Z_5$	$Z_6$				+1
$S_5 =$							$Z_7$	$Z_8$		+1
$S_6 =$								$Z_8$	$Z_9$	+1
$S_7 =$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$				+1
$S_8 =$				$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$	$X_8$	$X_9$	-1

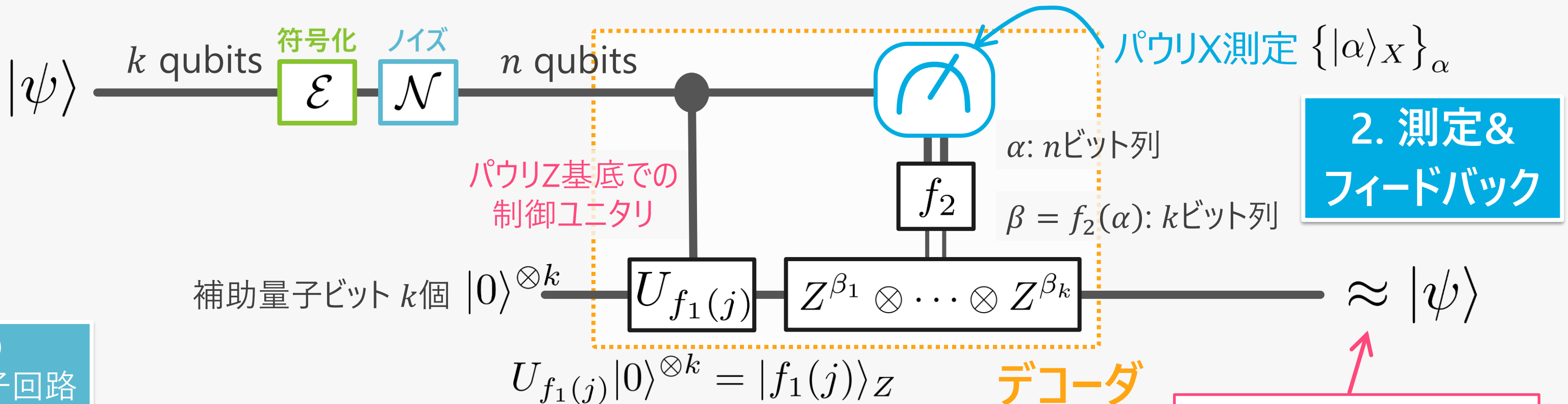
$|\bar{0}\rangle_Z \propto (|000\rangle_Z + |111\rangle_Z)^{\otimes 3}$   
 $|\bar{1}\rangle_Z \propto (|000\rangle_Z - |111\rangle_Z)^{\otimes 3}$

古典デコーダ  $f_1$   
 → Z基底を復号  
 どこかの物理qubitにXエラーが起こったか

古典デコーダ  $f_2$   
 → X基底を復号  
 どこかの物理qubitにZエラーが起こったか

## デコーダ - CSS符号の例 -

□ CSS符号のデコーディング量子回路



CSS符号のデコーディング量子回路

$f_1$ : Z基底の古典デコーダ → エラー  $\Delta_Z$   
 $f_2$ : X基底の古典デコーダ → エラー  $\Delta_X$   
 どちらも、nビットから、kビットへの関数

1. 制御化

$$\Delta_Q = \sqrt{\Delta_Z + \Delta_X}$$



# 非スタビライザー符号のデコーダ

CSS符号の  
通常デコーディング

相補性原理の考え方に基づく復号手法

例) Shorの9-qubit符号 = 1量子ビットの量子状態を、9量子ビットに符号化する手法

	●	●	●	●	●	●	●	●	
		X					Z		
スタビライザー									エラー シンδροーム
$S_1 =$	$Z_1$	$Z_2$							-1
$S_2 =$		$Z_2$	$Z_3$						-1
$S_3 =$				$Z_4$	$Z_5$				+1
$S_4 =$					$Z_5$	$Z_6$			+1
$S_5 =$							$Z_7$	$Z_8$	+1
$S_6 =$							$Z_8$	$Z_9$	+1
$S_7 =$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$			+1
$S_8 =$				$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$	$X_8$	-1

$|\bar{0}\rangle_Z \propto (|000\rangle_Z + |111\rangle_Z)^{\otimes 3}$   
 $|\bar{1}\rangle_Z \propto (|000\rangle_Z - |111\rangle_Z)^{\otimes 3}$

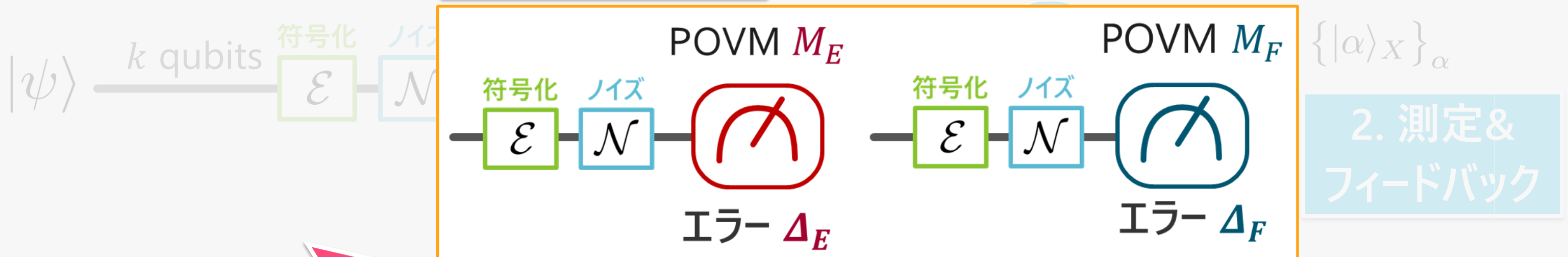
古典デコーダ  $f_1$   
 → Z基底を復号  
 どこかの物理qubitにXエラーが起こったか

古典デコーダ  $f_2$   
 → X基底を復号  
 どこかの物理qubitにZエラーが起こったか

## デコーダ - CSS符号の例 -

CSS符号のデコーディング量子回路

二つのPOVM  $M_E$ と $M_F$   
からデコーダを作る。

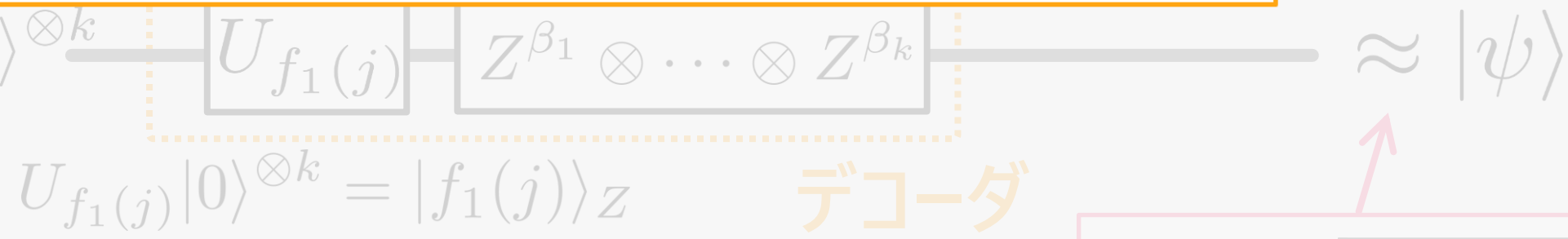


2. 測定 & フィードバック



CSS符号の  
デコーディング量子回路

$f_1$ : Z基底の古典デコーダ → エラー  $\Delta_Z$   
 $f_2$ : X基底の古典デコーダ → エラー  $\Delta_X$   
 どちらも、 $n$ ビットから、 $k$ ビットへの関数



1. 制御化

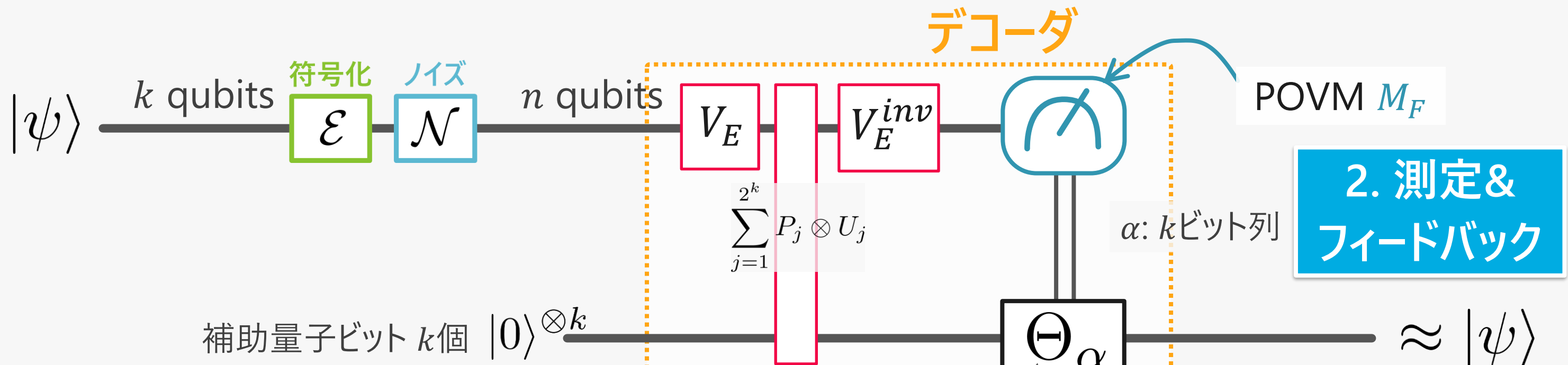
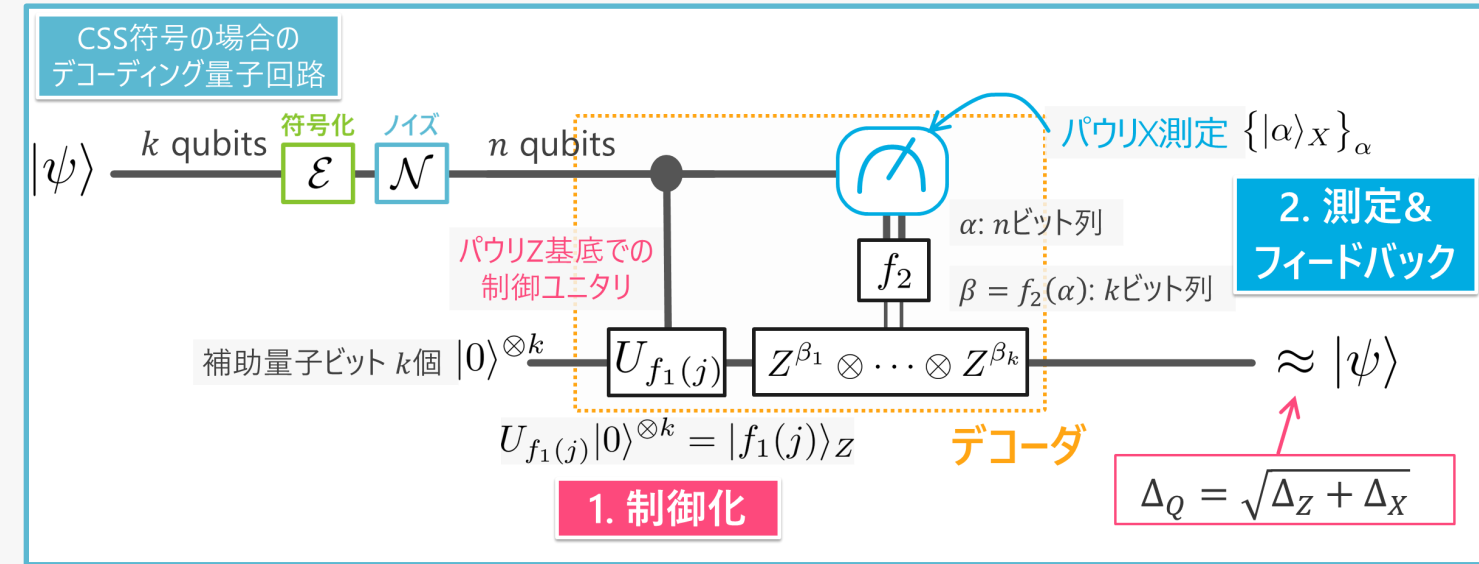
$$\Delta_Q = \sqrt{\Delta_Z + \Delta_X}$$

# 非スタビライザ符号のデコーダ

相補性原理の考えに基づく復号手法

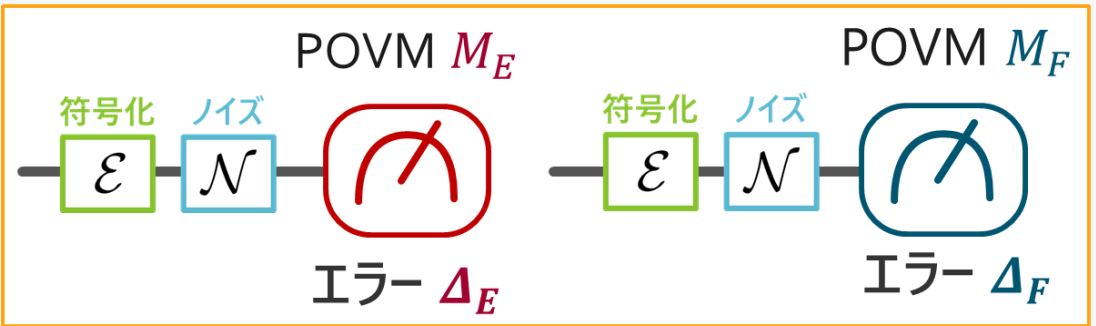
## デコーダの具体的な構成方法 2

□ 非スタビライザ符号のデコーディング量子回路



二つのPOVM  $M_E$ と $M_F$ からデコーダを作る。

POVM  $M_E$ のNaimark拡張を制御化する。



$$\Delta_Q \leq \sqrt{\Delta_E(2 - \Delta_E)} + \sqrt{\Delta_F} + \Xi(E, F)$$

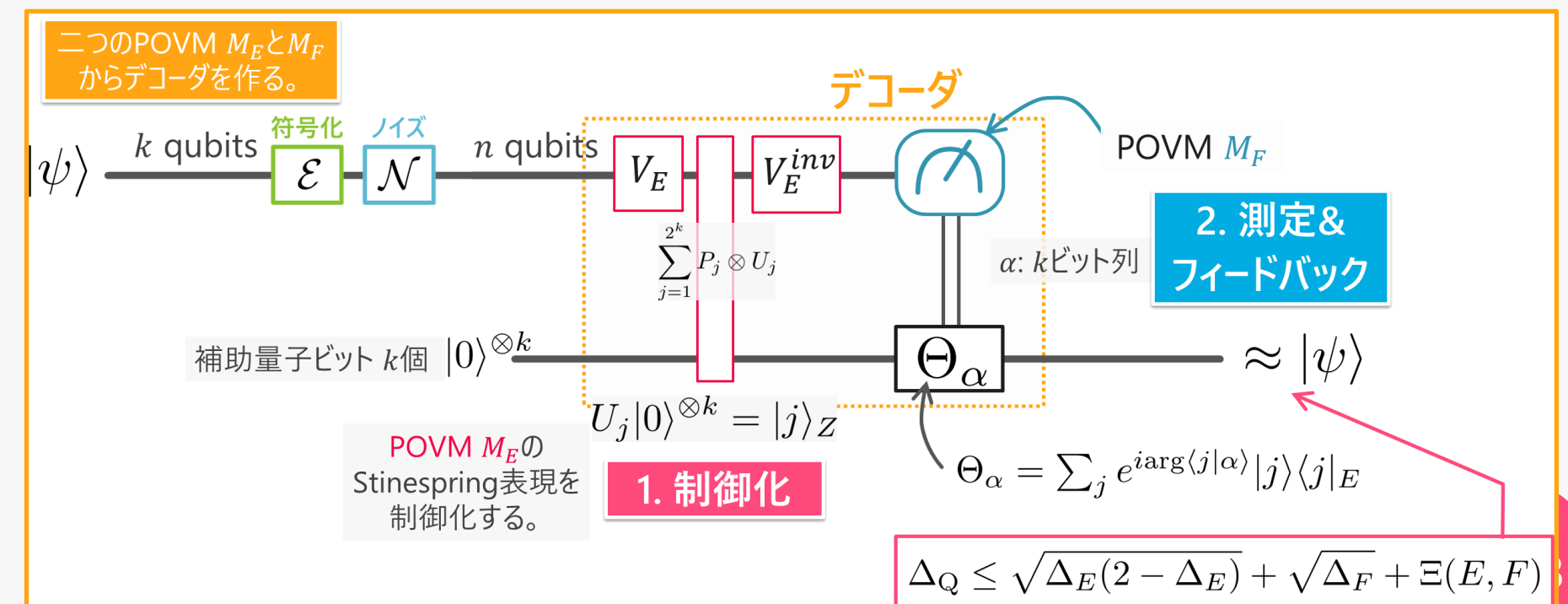
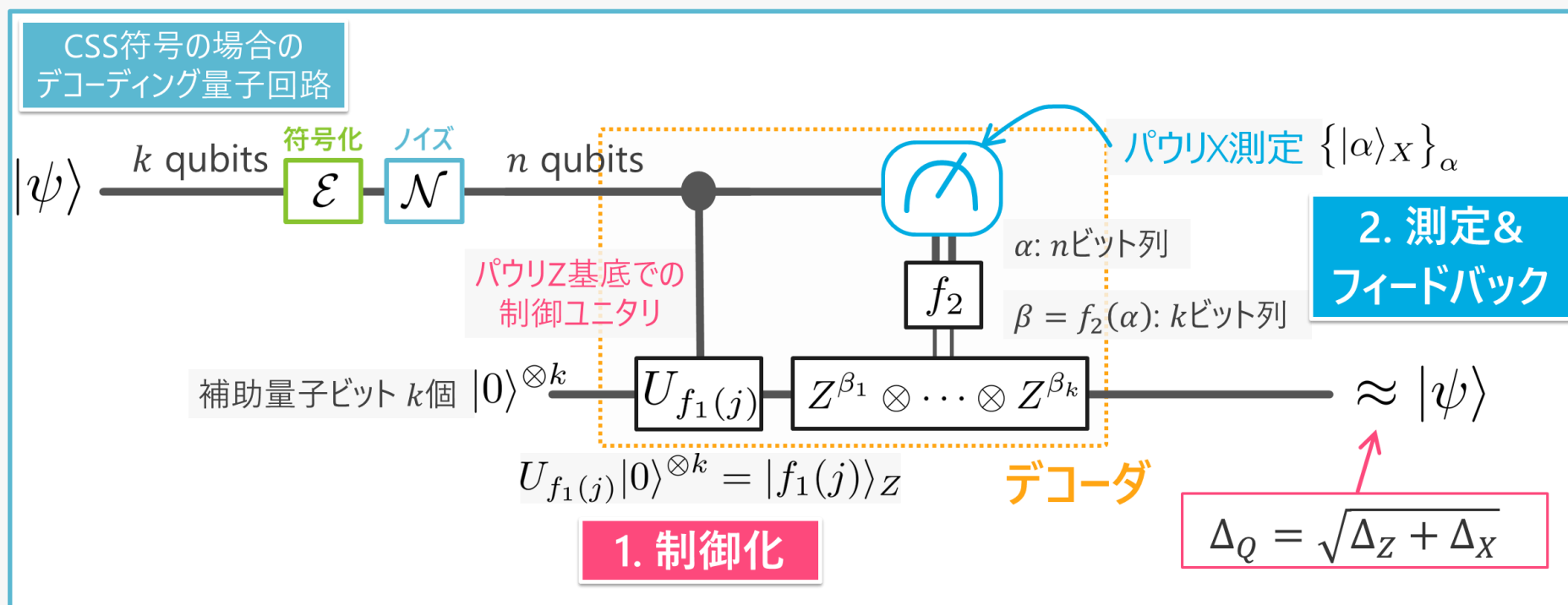
# 非スタビライザ符号のデコーダ

相補性原理の考え方に基づく復号手法

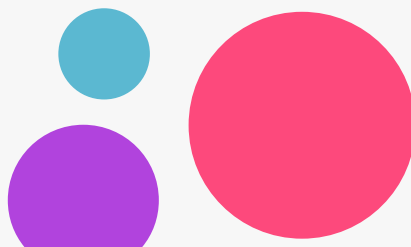
## デコーダの具体的な構成方法 3

### □ CSS符号と非スタビライザ符号のデコーディング量子回路

- どちらの場合も、一つの測定を「制御化」し、もう一つの測定を「測定 & フィードバック」している。
- CSS符号の場合は  $\Delta_Q = \sqrt{\Delta_Z + \Delta_X}$  で、非スタビライザ符号だと  $\Delta_Q \leq \sqrt{\Delta_E(2 - \Delta_E)} + \sqrt{\Delta_F}$  ((E, F)が相補的な場合)。
- この違いは、測定のバック・アクションの有無。CSS符号のシンドローム測定は、符号へのバック・アクションがない！



- 1 イントロダクション
- 2 非スタビライザ-符号のデコーダと相補性原理
- 3 デコーダの具体的な構成方法
- 4 **まとめ**



# まとめ

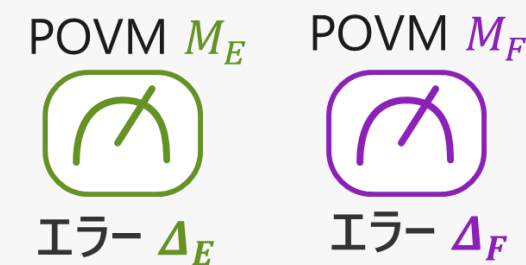
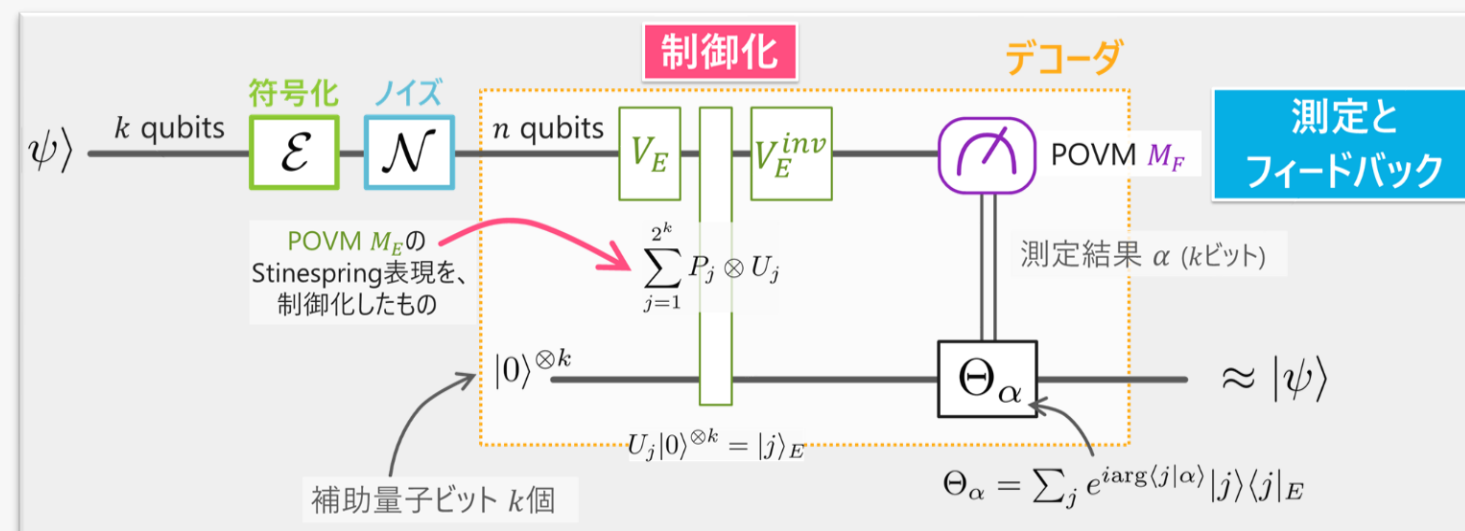
## デコーダと、相補性原理

- 古典情報を復元する二種類のPOVMから、量子情報を復元するデコーディング回路を具体的に構成した。
  - デコーディング・エラー = 「二つのPOVMのエラー」 + 「古典情報を定義する二基底の相補性」
  - 理論的：量子デコーダにおいて相補性原理が果たす役割が操作論的に明らかに。
  - 実用的：「量子デコーダを具体的に構成する」を、「古典情報のPOVMの構成」まで落とせる。

### FUTURE WORK

- デコーディング・エラーの右辺は最適ではないはず。
- From scratchで、デコーディング量子回路を作りたい！

T. Utsumi & YN, in preparation



$$\Delta_Q \leq \sqrt{\Delta_E(2 - \Delta_E)} + \sqrt{\Delta_F} + \sqrt{\Xi(E, F)}$$



# 宣伝させてください。1

基礎物理学研究所

## 基礎物理学研究所の、様々な研究促進プログラム

- 全国共同利用研究所として、**日本全国の研究者が活用できる**プログラムを提供。
  - 基研研究会
    - 数日程度の研究会を想定。国内<120万円、国際<250万円の補助ができる。
  - 国際モレキュール研究会
    - 海外から人を招聘して、二週間程度の議論主体の研究会を開催。100万円の補助。
  - 基研での長期滞在研究プログラム
    - 個人が一ヵ月～三ヵ月程度滞在し、研究を行う。  
などなど。開催にあたって、**専任の秘書さん**がついてくれる！

これらは「**日本全国の研究者**」が活用可能。  
量子情報・基礎論分野からも、是非、積極的な利用を！



# 宣伝させてください。2

量子情報理論の標準的教科書を目指して。

## 朝倉書店より、量子情報理論の教科書が出ます。

The screenshot shows the Asakura Publishing Co., Ltd. website. The main content area displays the book '重力波・摂動論' (Gravitational Waves and Perturbation Theory) by Hiroyuki Nakano and Keiichi Saito. The book is part of the 'シリーズ〈理論物理の探究〉1' (Series 'Exploration of Theoretical Physics' 1). The price is listed as 4,290 yen (including tax), with a body price of 3,900 yen. The book is A5 size, 272 pages, and was published on November 1, 2022. The ISBN is 978-4-254-13531-2. The website also features a search bar, a navigation menu, and a sidebar with genre categories.

著者：中田芳史

タイトル：「量子情報理論（仮題）」

シリーズ：〈理論物理の探求〉

出版社：朝倉書店

出版予定日：2024年の夏～冬にかけて（校正中）

初学者～専門家をカバーした（つもり）自己完結型の教科書  
世界的にも類をみない構成なので、是非。

