コヒーレント状態による単位作用素の分解の強収束性

Quantum Foundations 2024 3/11

なみきりょう

$$|\phi\rangle \overset{?}{=} \frac{1}{\pi}\int_{\alpha\in\mathbb{C}} |\alpha\rangle\langle\alpha|\phi\rangle \mathrm{d}^2\alpha \qquad \text{c.f.} \quad |\phi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n|\phi\rangle$$

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle, \quad \alpha\in\mathbb{C} \qquad\qquad I \overset{s}{=} \sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n|$$

arXiv:2402.08317

コヒーレント状態

最小不確定状態、レーザー光

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle, \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

- 消滅演算子の固有状態

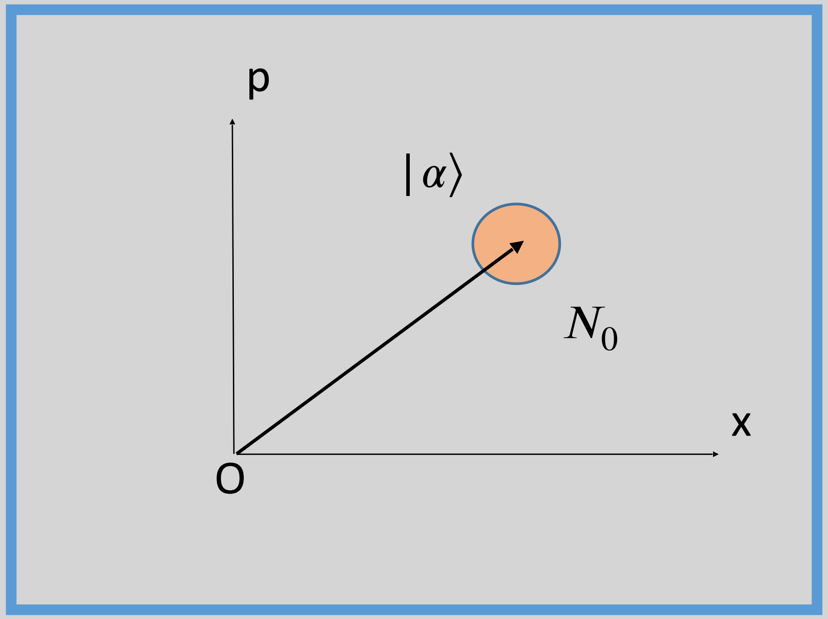
$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \qquad [a, a^\dagger] = \mathbf{1}$$

- 積分表示の単位の分解

$$I \stackrel{s}{=} \int_{\alpha\in\mathbb{C}} \frac{1}{\pi}|\alpha\rangle\langle\alpha|\,\mathrm{d}^2\alpha$$

c.f.　完全性条件　$I \stackrel{s}{=} \sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n|$

ランダムユニタリ



積分表示の単位作用素の分解

$$I \stackrel{s}{=} \int_{\alpha\in\mathbb{C}} \frac{1}{\pi} |\alpha\rangle\langle\alpha| \mathrm{d}^2\alpha$$

c.f. 完全性条件 $I \stackrel{s}{=} \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n|$

ランダムユニタリ

たいてい弱収束、弱い意味で、との注意書きがある、なぜか？

弱い意味：
行列要素が等しい

$$\langle\psi|\phi\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha\in\mathbb{C}} \langle\psi|\alpha\rangle\langle\alpha|\phi\rangle \mathrm{d}^2\alpha$$

- 利点：ベクトル値あるいは作用素値の積分を考えずに済む
- 欠点：通常の分解（展開）が使えない

$$|\phi\rangle \stackrel{?}{=} \frac{1}{\pi}\int_{\alpha\in\mathbb{C}} |\alpha\rangle\langle\alpha|\phi\rangle \mathrm{d}^2\alpha \qquad \text{c.f. } |\phi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n|\phi\rangle$$

形式的な計算

Klauder, Ann. Phys. 11, 123 (1960)
Mandel and Wolf,
Optical coherence and Quantum optics (1995)

$$I \overset{?}{=} \int_{\alpha\in\mathbb{C}} \frac{1}{\pi} |\alpha\rangle\langle\alpha| \, \mathrm{d}^2\alpha$$

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

積分と無限和を交換していいとする

$$\int |\alpha\rangle\langle\alpha| \, d^2\alpha = \int e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^n \bar{\alpha}^m}{\sqrt{n!m!}} |n\rangle\langle m| d^2\alpha$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \int \left(e^{-|\alpha|^2} \frac{\alpha^n \bar{\alpha}^m}{\sqrt{n!m!}} \right) d^2\alpha |n\rangle\langle m| = \pi \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n|$$

曲座標で計算

$$\int_0^\infty \frac{r^{n+m} e^{-r^2}}{n!} r dr \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\phi} d\phi = \pi\delta_{n,m}$$

||

形式的な計算

Klauder, Ann. Phys. 11, 123 (1960)
Mandel and Wolf,
Optical coherence and Quantum optics (1995)

?

$$I = \int_{\alpha\in\mathbb{C}} \frac{1}{\pi} |\alpha\rangle\langle\alpha| \mathrm{d}^2\alpha$$

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad \alpha\in\mathbb{C}$$

積分と無限和を交換していいとする

交換してもよいという
具体的な条件は何？

$$\int |\alpha\rangle\langle\alpha|\, d^2\alpha = \int e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^n \bar{\alpha}^m}{\sqrt{n!m!}} |n\rangle\langle m| d^2\alpha$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \int \left(e^{-|\alpha|^2} \frac{\alpha^n \bar{\alpha}^m}{\sqrt{n!m!}} \right) d^2\alpha |n\rangle\langle m| = \pi \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n|$$

曲座標で計算

$$\int_0^{\infty} \frac{r^{n+m} e^{-r^2}}{n!} r dr \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\phi} d\phi = \pi\delta_{n,m}$$

形式的な計算

Klauder, Ann. Phys. 11, 123 (1960)
Mandel and Wolf,
Optical coherence and Quantum optics (1995)

$$I \overset{?}{=} \int_{\alpha\in\mathbb{C}} \frac{1}{\pi} |\alpha\rangle\langle\alpha| \mathrm{d}^2\alpha$$

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

積分と無限和を交換していいとする

$$\int |\alpha\rangle\langle\alpha|\, d^2\alpha = \int e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^n \bar{\alpha}^m}{\sqrt{n!m!}} |n\rangle\langle m| d^2\alpha$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \underline{\int \left(e^{-|\alpha|^2} \frac{\alpha^n \bar{\alpha}^m}{\sqrt{n!m!}} \right) d^2\alpha}\, |n\rangle\langle m| = \pi \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n|$$

交換してもよいという
具体的な条件は何？

通常のノルムでは収束しない、強収束に注意！

曲座標で計算

$$\int_0^{\infty} \frac{r^{n+m} e^{-r^2}}{n!} r dr \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\phi} d\phi = \pi \delta_{n,m}$$

$$||$$

作用素の収束

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n|$$

①ノルム収束：通常の収束

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \|A - A_n\| = 0$$

$$\|A\| := \sup_{\|\phi\|\leq 1} \|A\phi\|$$

$$\|\phi\| := \sqrt{\langle\phi|\phi\rangle}$$

$$I_k = \sum_{n=0}^{k} |n\rangle\langle n|$$

$$\|I_m - I_k\| = \left\| \sum_{n=k+1}^{m} |n\rangle\langle n| \right\| = 1$$

$\Rightarrow$ コーシー列ではない・・・

通常のノルムでは収束しない！

作用素の収束

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n|$$

①ノルム収束：通常の収束

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \|A - A_n\| = 0$$

$$\|A\| := \sup_{\|\phi\|\le 1} \|A\phi\|$$

$$\|\phi\| := \sqrt{\langle\phi|\phi\rangle}$$

②強収束：作用させた状態が収束

$$A = s\text{-}\lim_{n\to\infty} A_n \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} \|A\phi - A_n\phi\| = 0,\; \forall\phi\in\mathcal{H}.$$

$$|\varphi\rangle = \sum_n a_n |n\rangle \in \mathcal{H} \;\Leftrightarrow\; \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$$

$$I_k = \sum_{n=0}^{k} |n\rangle\langle n|$$

$$\|(I_m - I_k)|\varphi\rangle\| = \left\|\sum_{n=k+1}^{m} |n\rangle\langle n|\varphi\rangle\right\| = \left\|\sum_{n=k+1}^{m} a_n |n\rangle\right\| = \sqrt{\sum_{n=k+1}^{m} |a_n|^2} \;\to 0 \quad (k,m\to\infty)$$

コーシー列となる、状態に作用させれば収束＝強収束！

作用素の収束

$$I \overset{S}{=} \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n|$$

①ノルム収束：通常の収束

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \|A - A_n\| = 0$$

$$\|A\| := \sup_{\|\phi\|\le 1} \|A\phi\|$$

②強収束：作用させた状態が収束

$$A = s\text{-}\lim_{n\to\infty} A_n \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} \|A\phi - A_n\phi\| = 0,\;\; \forall\phi \in \mathcal{H}.$$

③弱収束：行列要素が収束

$$A = w\text{-}\lim_{n\to\infty} A_n \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} \langle\psi|A - A_n|\phi\rangle = 0,\;\; \forall\phi,\psi \in \mathcal{H}.$$

Schwartz $\langle\psi|A - A_n|\phi\rangle \le \|\psi\|\|(A - A_n)\phi\|$

$$I \overset{?}{=} \int_{\alpha\in\mathbb{C}} \frac{1}{\pi} |\alpha\rangle\langle\alpha| \mathrm{d}^2\alpha$$

① ⇒ ② ⇒ ③

通常　強　弱

弱収束でいいのでしょうか？

主要結果：強収束します

定理

arXiv:2402.0831

$$\|(I - A_n)\,|\varphi\rangle\| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

$$A_n\,|\varphi\rangle := \pi^{-1}\int_{|\alpha|\le n} |\alpha\rangle\langle\alpha\,|\,\varphi\rangle d^2\alpha,$$

$$|\varphi\rangle \in \mathscr{H}$$

有限閉領域の積分はベクトル値
のリーマン積分として存在確定

$$I = s\text{-}\lim_{r\to\infty}\int_{|\alpha|\le r}\frac{|\alpha\rangle\langle\alpha|}{\pi}d^2\alpha$$

積分と和の交換

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle,$$

$$\int_{D(R)}|\alpha\rangle\langle\alpha|\varphi\rangle d^2\alpha = \int_{D(R)} e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle\langle\alpha|\varphi\rangle d^2\alpha$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{D(R)} e^{-|\alpha|^2/2}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\langle\alpha|\varphi\rangle d^2\alpha\right)|n\rangle$$

ベクトル値
の積分

$$\int\begin{pmatrix} f \\ g \\ h \\ \vdots \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} \int f \\ \int g \\ \int h \\ \vdots \end{pmatrix}$$

積分値を
要素とした
ベクトル？

定理 $D(r) := \{\, \alpha \in \mathbb{C} \mid |\alpha| \le r \,\}$

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2\,|\alpha|^{2n} < \infty, \quad \alpha \in D(r),$

(ii) $\displaystyle\int_{D(r)}\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2\,|\alpha|^{2n}\,d^2\alpha < \infty.$

$$\Rightarrow \int_{D(r)}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\alpha^n|n\rangle\right)d^2\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{D(r)}a_n\alpha^n d^2\alpha\right)|n\rangle.$$

積分と和の交換

定理 $D(r) := \{\, \alpha \in \mathbb{C} \mid |\alpha| \le r \,\}$

Theorem 18, arXiv:2402.0831

(i) $\displaystyle \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \, |\alpha|^{2n} < \infty, \quad \alpha \in D(r),$

(ii) $\displaystyle \int_{D(r)} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \, |\alpha|^{2n} \, d^2\alpha < \infty.$

$$\Rightarrow \int_{D(r)} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \alpha^n |n\rangle \right) d^2\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{D(r)} a_n \alpha^n d^2\alpha \right) |n\rangle.$$

$$\Downarrow$$

有限領域、冪級数 → 一様収束
積分と和は交換してよい

$$\int_D \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 \, |\alpha|^{2k} \, d^2\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \int_D |a_k|^2 \, |\alpha|^{2k} \, d^2\alpha < \infty$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \alpha^n |n\rangle \in \mathcal{H}$$

連続関数の一様収束極限は連続
有限領域の連続関数の積分
（ベクトル値）リーマン積分が存在

$$\phi := \int_D \sum_{n=0}^{\infty} a_n \alpha^n \, |n\rangle \;\; d^2\alpha \in \mathcal{H}$$

$$\phi^{(N-1)} := \int_D \sum_{n=0}^{N} a_n \alpha^n \, |n\rangle \;\; d^2\alpha \in \mathcal{H}$$

有限和なら
積分と可換

$$\|\phi - \psi\| \le \left\|\phi - \phi^{(N)}\right\| + \left\|\phi^{(N)} - \psi^{(N)}\right\| + \left\|\psi^{(N)} - \psi\right\|$$

$$\to 0 \qquad (N \to \infty).$$

積分と和の交換

定理 $D(r) := \{\, \alpha \in \mathbb{C} \mid |\alpha| \leq r \,\}$

Theorem 18, arXiv:2402.0831

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \, |\alpha|^{2n} < \infty, \quad \alpha \in D(r),$

(ii) $\displaystyle\int_{D(r)} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \, |\alpha|^{2n} \, d^2\alpha < \infty.$

$$\Rightarrow \int_{D(r)} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \alpha^n |n\rangle \right) d^2\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{D(r)} a_n \alpha^n d^2\alpha \right) |n\rangle.$$

$\Downarrow$

有限領域、冪級数 → 一様収束
積分と和は交換してよい

$$\int_D \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 \, |\alpha|^{2k} \, d^2\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \int_D |a_k|^2 \, |\alpha|^{2k} \, d^2\alpha < \infty$$

$\Downarrow$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \alpha^n |n\rangle \in \mathcal{H}$$

連続関数の一様収束極限は連続
有限領域の連続関数の積分
（ベクトル値）リーマン積分が存在

$$\phi := \int_D \sum_{n=0}^{\infty} a_n \alpha^n \, |n\rangle \;\; d^2\alpha \in \mathcal{H}$$

$$\phi^{(N-1)} := \int_D \sum_{n=0}^{N} a_n \alpha^n \, |n\rangle \;\; d^2\alpha \in \mathcal{H}$$

$$|b_n| = \left| \int_D a_n \alpha^n d^2\alpha \right| \leq \int_D |a_n \alpha^n| \, d^2\alpha$$

$$\leq |D|^{1/2} \sqrt{\int_D |a_n \alpha^n|^2 \, d^2\alpha}.$$

$$\Rightarrow \sum_n |b_n|^2 \leq |D| \sum_n \int_D |a_n \alpha^n|^2 \, d^2\alpha < \infty$$

$$\psi := \sum_{n=0}^{\infty} b_n \, |n\rangle \in \mathcal{H}$$

$$\psi^{(N-1)} := \sum_{n=0}^{N} b_n \, |n\rangle \in \mathcal{H}$$

有限和なら
積分と可換

$$\|\phi - \psi\| \leq \left\| \phi - \phi^{(N)} \right\| + \left\| \phi^{(N)} - \psi^{(N)} \right\| + \left\| \psi^{(N)} - \psi \right\|$$

$$\to 0 \qquad (N \to \infty).$$

積分と和の交換

$$I \overset{\mathrm{S}}{=} \int_{\alpha\in\mathbb{C}} \frac{1}{\pi}|\alpha\rangle\langle\alpha|\,\mathrm{d}^2\alpha$$

$$\int_{D(R)} |\alpha\rangle\langle\alpha|\,\varphi\rangle d^2\alpha = \int_{D(R)} e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle\langle\alpha|\varphi\rangle d^2\alpha$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{D(R)} e^{-|\alpha|^2/2}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\langle\alpha|\varphi\rangle d^2\alpha\right)|n\rangle$$

- Riemann 積分：一様収束を証明すればよい。
- Lebesgue 積分：優収束定理などを使用できる。

- Bochner 積分 : Banach空間に値をとる積分

優収束定理を使用できる

ベクトル値 $L_2[\mathbb{C},\ell_2]$

作用素値 $L_2[\mathbb{C},\mathscr{B}(\mathscr{H})]$

- ノルムが可積分なら存在確定

$\int \||\alpha\rangle\langle\alpha|\varphi\rangle\|^2 d^2\alpha < \infty$ 　$\mathscr{H}$値可積分

$\int \||\alpha\rangle\langle\alpha|\|^2 d^2\alpha = \infty$ 　作用素値可積分でない

数列空間で作業していたのに、関数空間の知識が必要になるのは残念

スモールエル２で作業していたのに、ラージエル２

Klauder の講義ノートによる別証明

Suggested Problems 1.5 (2006年)
http://www.phys.ufl.edu/~klauder/norway/

定理 $0 \le A_n \le I$ かつ $A_n \le A_{n+1}$ かつ $\lim_{n\to\infty} \langle \phi | I - A_n | \psi \rangle = 0$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|(I - A_n)\psi\rangle\| = 0$$

$$\langle \phi | A_n | \varphi \rangle := \pi^{-1} \int_{|\alpha| \le n} \langle \phi | \alpha \rangle \langle \alpha | \varphi \rangle d^2\alpha,$$

として、弱収束を証明する。
上記の定理の条件を満たすことを示せば、強収束が証明できる

- 単調性があれば弱収束から強収束へ持っていける
- 射影でない族でもよい

まとめ

R. Namiki arXiv:2402.0831

- 作用素の収束、３種類
- 完全性条件は強収束
- 初等的な証明
- Bochner積分は便利
- Klauderによる別証明

$$|\phi\rangle \overset{S}{=} \frac{1}{\pi}\int_{\alpha\in\mathbb{C}} |\alpha\rangle\langle\alpha|\phi\rangle \mathrm{d}^2\alpha \qquad \text{c.f.} \quad |\phi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n|\phi\rangle$$

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle, \quad \alpha\in\mathbb{C} \qquad I \overset{s}{=} \sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n|$$