一般確率論と量子論基礎

高倉　龍
京都大学　基礎物理学研究所

YUKAWA INSTITUTE FOR THEORETICAL PHYSICS

Introduction

量子論基礎（量子基礎論） :

- 量子論の特徴（「量子性」）は何か？
- なぜ量子論で世界は記述できるのか？

方針①

量子論の公理を仮定し量子論の限界を探る (不確定性関係, etc.)

方針②

量子論を含むより一般的な枠組みを考え量子論の特徴を調べる

Introduction

* general ↔ generalized
probabilistic ↔ probability

** 1963年のMackeyの講義録に[4]
似た定式化が掲載（但し量子
論理の文脈）

一般確率論（*General Probabilistic Theories**; *GPTs*）

量子論を含む一般的な枠組みの1つ(量子論の一般化). 操作的に自然な公理・実験的な事実に基づく量子論(Hilbert空間)の“導出”や“更なる理解”を得るために創始.

[大まかな歴史]

- 1964年~60年代後半にかけて Günther Ludwig (とそのグループ)により創始[1,2,3など]** → 現代で用いるGPTsの定式化は1964年に完成

- 1970年にDavies, Lewis[5]が(恐らくLudwigらとは独立に)同じ定式化を量子論の操作論的一般化として採用 → 70年代前半にEdwards, Gudderらにより発展 [6,7,8など] (←こっちの方が読み易い(？))

- 1980年代~90年代は特にめぼしい発展はない(？)

- 2000年代にHardy, Barnum, Barrettらが(量子)情報理論的な観点をGPTsに持ち込む[9,10,11]
→ 2010年代~は情報理論のみならず他の様々な(量子基礎論的な)観点が持ち込まれ現在も発展
(具体的な文献は[12-16など]参照)

Introduction

* general ↔ generalized
probabilistic ↔ probability

一般確率論（*General Probabilistic Theories**; *GPTs*）

量子論を含む一般的な枠組みの1つ(量子論の一般化). 操作的に自然な公理・実験的な事実に基づく量子論(Hilbert空間)の“導出”や“更なる理解”を得るために創始.

本講演では,

- GPTsの数学的基礎・定式化
- (簡単なモデルで)量子論の“導出”・“更なる理解”

について説明する.

Contents

Contents

GPTs

量子論(QT)
（Hilbert 空間）

「物理的な」公理

? ? ・・・ ?

“statistical causality” + 確率混合可能性 + ?

数学的表現

一般確率論 (GPTs) （特にGPTsは量子論を含む）

GPTs

Simple* formulation of a GPT [12-14,17]

statistical causality + 確率混合可能性 (+ minorな公理)

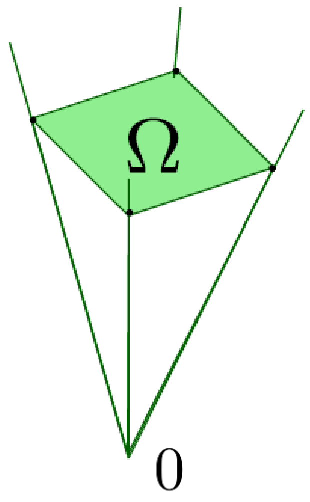
⇩

- Ω : $V := \mathbb{R}^{N+1}$ 内のコンパクト凸集合 s.t. $span(\Omega) = V,\ 0 \notin \Omega;$
- $\mathcal{E}_\Omega$: $V^*(\simeq V)$ 内の部分集合 $[0, u] := \{e \in V^* \mid 0 \leq e \leq u\}$, 但し

$$e \leq f \underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (f - e)(\omega) \geq 0 \ \ (\forall \omega \in \Omega), \quad u(\omega) = 1 \ \ (\forall \omega \in \Omega)$$

の組 $(\Omega, \mathcal{E}_\Omega)$ を **一般確率論** (a ***GPT***) という．集合 $(\Omega, \mathcal{E}_\Omega)$ をそれぞれ ***state space***, ***effect space*** と呼び，元 $u \in V^*$ を ***unit effect*** と呼ぶ.

$$V = span(\Omega)$$
$$= \mathbb{R}^3$$



* 簡単のため，上記の公理に加え幾つかの数学的(物理的に自然でない?)仮定を課している.

GPTs

Simple* formulation of a GPT [12-14,17]

- Ω : $V := \mathbb{R}^{N+1}$ 内のコンパクト凸集合 s.t. $span(\Omega) = V,\ 0 \notin \Omega;$
- $\mathcal{E}_\Omega$: $V^*(\simeq V)$ 内の部分集合 $[0,u] := \{e \in V^* \mid 0 \leq e \leq u\}$, 但し

$$e \leq f \underset{\text{def}}{\iff} (f-e)(\omega) \geq 0 \quad (\forall \omega \in \Omega), \qquad u(\omega) = 1 \quad (\forall \omega \in \Omega)$$

e.g.) (有限次元)量子論

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}^d \ (d < \infty),$$

$$\begin{cases} \Omega = \Omega_{\mathrm{QT}}(\mathcal{H}) = \{\rho \in \mathcal{L}_S^+(\mathcal{H}) \mid \rho \geq 0, \mathrm{Tr}[\rho] = 1\} \\ \mathcal{E}_\Omega = \{E \in \mathcal{L}_S^+(\mathcal{H}) \mid O \leq E \leq I\} \end{cases} \longrightarrow$$

Ω は $\mathcal{L}_S(\mathcal{H}) \simeq \mathbb{R}^{d^2}$ 内のコンパクト凸集合

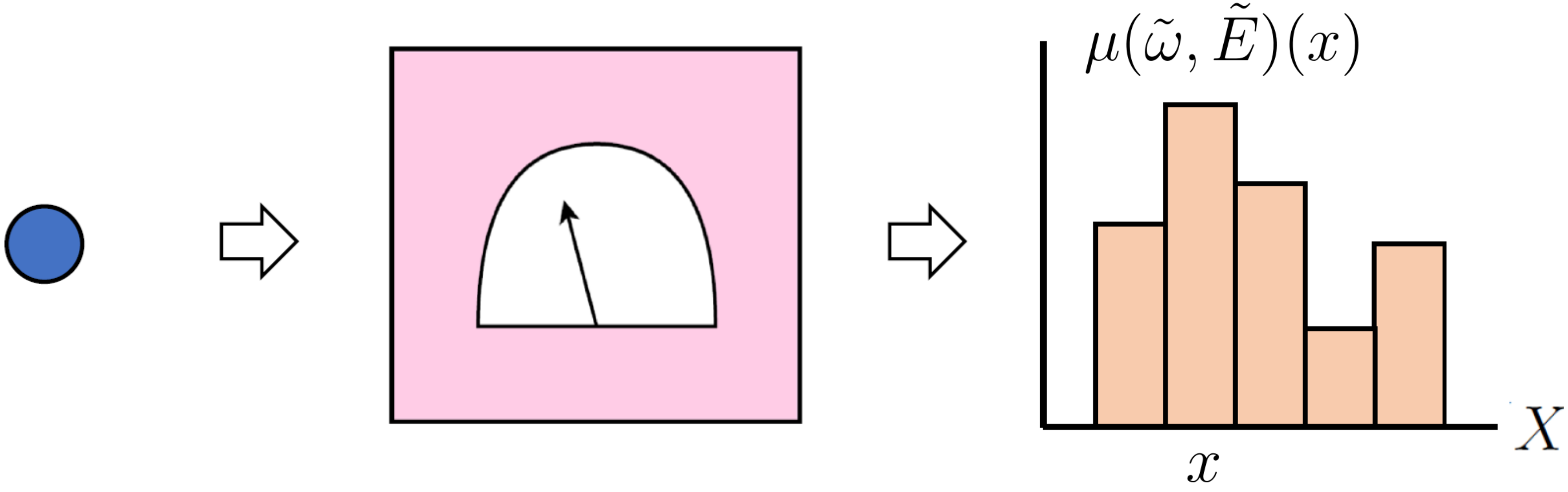
(d=2の時は $\mathbb{R}^4$ 内の3次元球; Bloch球)

GPTs

majorな公理 1 : statistical causality[18,19]

← この現象をベクトル空間(凸集合)の言葉で表現したもの = GPTs

preparation　　measurement　　probabilities



$\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$

state

$\tilde{E} \in \tilde{\mathcal{O}}$

observable

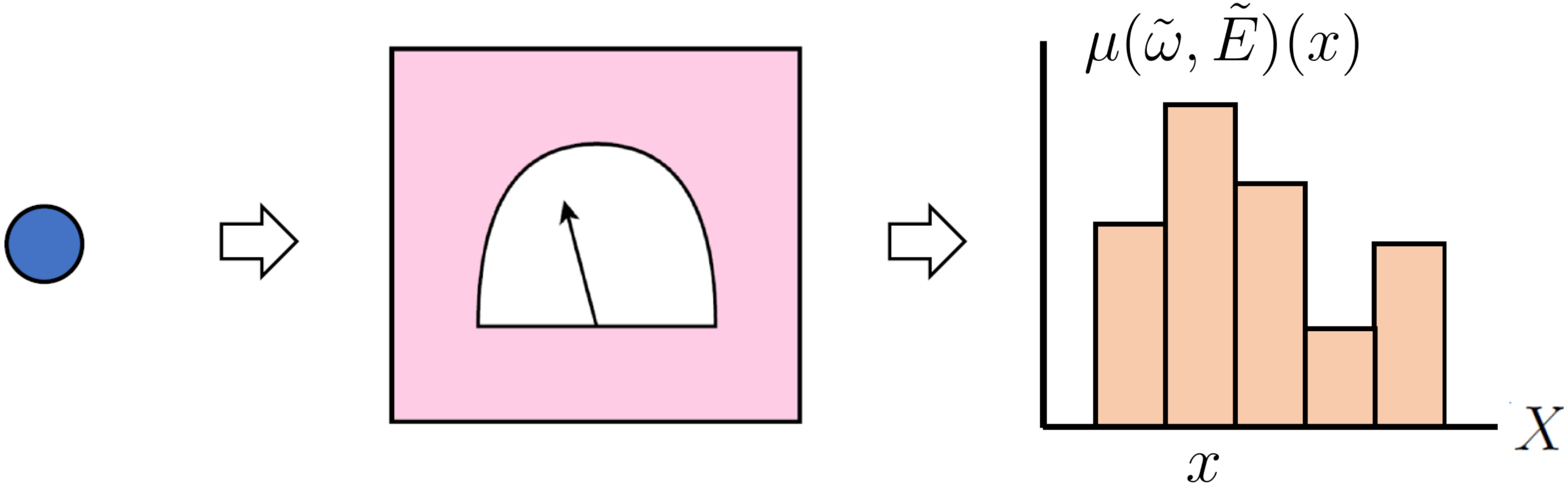
stateとobservableは確率分布を定める

GPTs

majorな公理 1 : statistical causality [18,19]

※ 今回は effect は写像として定義する

preparation　　measurement　　probabilities



$\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$

state

$$\tilde{E} = \{\tilde{e}_x\}_{x \in X}$$

$$\textstyle\sum_{x \in X} \tilde{e}_x(\tilde{\omega}) = 1 \quad (\forall \tilde{\omega} \in \tilde{\Omega})$$

$$\tilde{e}_x = \mu(\cdot, \tilde{E})(x)$$ ***effect***

$$\tilde{e}_x \in \tilde{\mathcal{E}} : \tilde{\omega} \mapsto \mu(\tilde{\omega}, \tilde{E})(x)$$

GPTs

minorな公理 1 : separation axiom

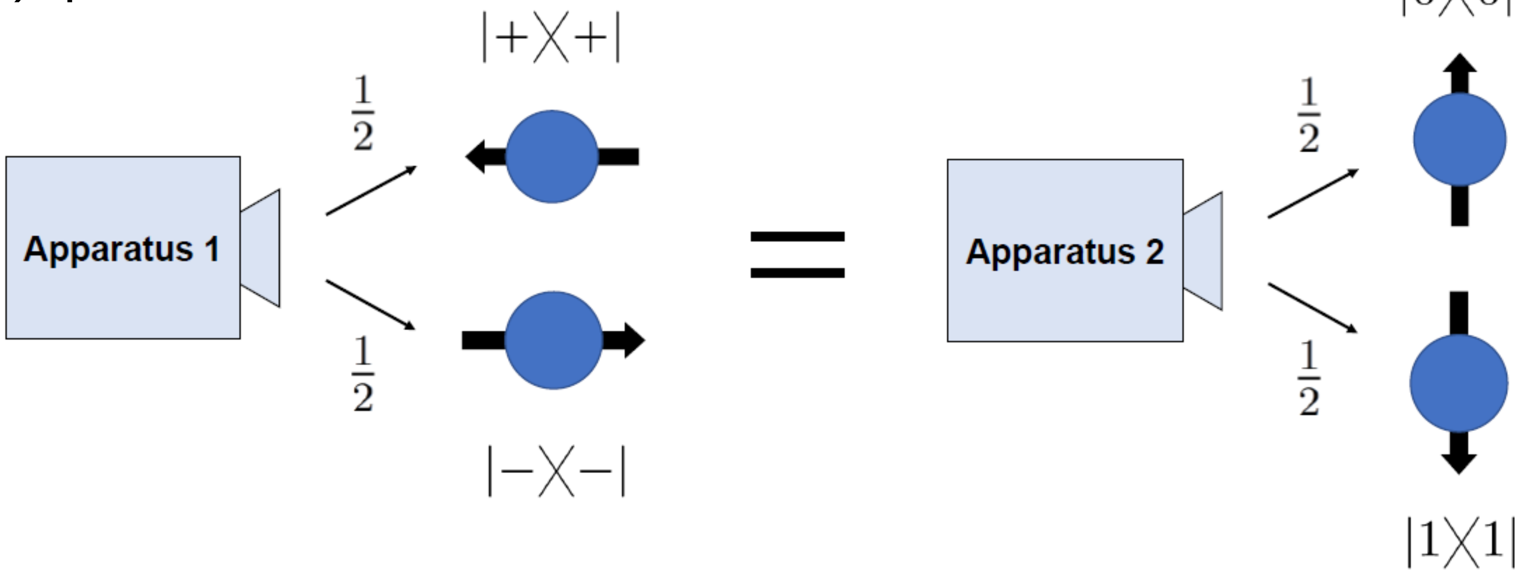
※ 今回は effect は写像として定義する

$$\tilde{e}(\tilde{\omega}_1) = \tilde{e}(\tilde{\omega}_2)\ (\forall \tilde{e} \in \tilde{\mathcal{E}}) \quad \Rightarrow \quad \tilde{\omega}_1 = \tilde{\omega}_2$$

$$(\tilde{\omega}_1 \neq \tilde{\omega}_2 \quad \Rightarrow \quad \exists \tilde{e} \in \tilde{\mathcal{E}} \text{ s.t. } \tilde{e}(\tilde{\omega}_1) \neq \tilde{e}(\tilde{\omega}_2))$$

[20]

e.g.) qubit系

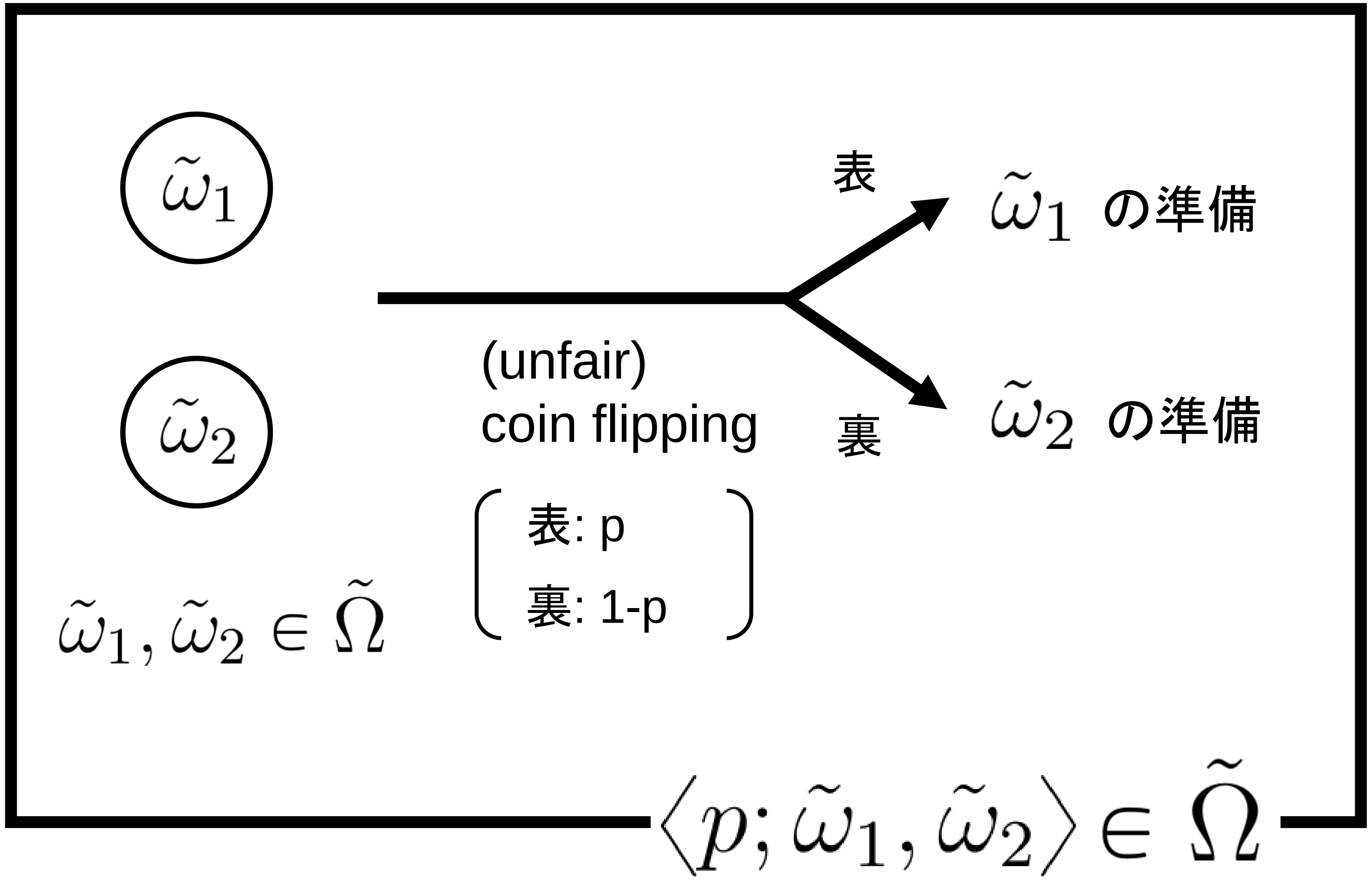


状態準備の“context”を無視する

(確率だけに着目する)

GPTs

majorな公理２: 確率混合可能性 [7,8,21]



measurement

$$\tilde{e}\left(\langle p; \tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2 \rangle\right)$$

$$= p\tilde{e}(\tilde{\omega}_1) + (1-p)\tilde{e}(\tilde{\omega}_2)$$

$$(\forall \tilde{e} \in \tilde{\mathcal{E}})$$

GPTs

majorな公理２: 確率混合可能性 [7,8,21]

有限個の状態 $\{\tilde{\omega_i}\}_{i=1}^n \subset \tilde{\Omega}$ と確率分布 $\{p_i\}_{i=1}^n$ に対し,

$$\tilde{e}(\langle p_1, \cdots, p_n;\ \tilde{\omega_1}, \cdots, \tilde{\omega_n}\rangle) = \sum_{i=1}^n p_i \tilde{e}(\tilde{\omega_i}) \quad (\forall \tilde{e} \in \tilde{\mathcal{E}})$$

を満たす状態 $\langle p_1, \cdots, p_n;\ \tilde{\omega_1}, \cdots, \tilde{\omega_n}\rangle \in \tilde{\Omega}$ が存在する.

$\longrightarrow$ effect $\tilde{e}$ は ***"affine" function***: $A\mathit{ff}(\tilde{\Omega}, \mathbb{R}) := \{\tilde{f} : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R} \mid \text{affine}\} \supset \tilde{\mathcal{E}}$

$$\tilde{f}(\langle p; \tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2\rangle) = p\tilde{f}(\tilde{\omega}_1) + (1-p)\tilde{f}(\tilde{\omega}_2) \ (\forall p \in [0,1],\ \forall \tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2 \in \tilde{\Omega})$$

を満たす関数 $\tilde{f} : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}$ を affine function といい, $\tilde{\Omega}$ 上の affine function 全体の集合を $A\mathit{ff}(\tilde{\Omega}, \mathbb{R}) := \{\tilde{f} : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R} \mid \text{affine}\}$ と書く.

GPTs

数学的な仮定１: *no-restriction hypothesis* [22]

Effect space $\tilde{\mathcal{E}}$ は集合 $\tilde{\mathcal{E}}_{\tilde{\Omega}} := \{\tilde{g} \colon \tilde{\Omega} \to \mathbb{R} \mid \text{affine},\ \tilde{g}(\tilde{\omega}) \in [0,1]\}$
と一致する:

$$\tilde{\mathcal{E}} = \tilde{\mathcal{E}}_{\tilde{\Omega}}.$$

$$\mathit{Aff}(\tilde{\Omega}, \mathbb{R}) := \{\tilde{f} \colon \tilde{\Omega} \to \mathbb{R} \mid \text{affine}\}$$

$$\bigcup$$

「物理的な」effect

↓

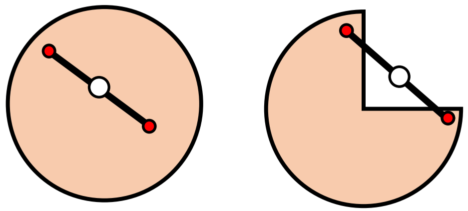
$\tilde{\mathcal{E}}_{\tilde{\Omega}} := \{\tilde{g} \colon \tilde{\Omega} \to \mathbb{R} \mid \text{affine},\ \tilde{g}(\tilde{\omega}) \in [0,1]\}$: 「数学的な」effect 全体 $= \tilde{\mathcal{E}}$

“数学的に許される effect は全て物理的に許される”
(→量子論でも仮定される)

GPTs

ベクトル空間への埋め込み

(up to an isomorphism)



以下の条件を満たすベクトル空間 V と単射 $J\colon \tilde{\Omega} \to V$ が存在：

- $J(\langle p; \tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2 \rangle) = pJ(\tilde{\omega}_1) + (1-p)J(\tilde{\omega}_2) \quad (\forall p \in [0,1],\ \tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2 \in \tilde{\Omega}),$
- $span(J(\tilde{\Omega})) = V,\ 0 \notin J(\tilde{\Omega}). \quad \longrightarrow \quad span(\Omega) = V,\ 0 \notin \Omega$

$V = \mathit{Aff}(\tilde{\Omega}, \mathbb{R})^*$ (双対), $J\colon \tilde{\Omega} \to \mathit{Aff}(\tilde{\Omega}, \mathbb{R})^*$ by $J(\tilde{\omega})\colon \mathit{Aff}(\tilde{\Omega}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

(線形に拡張) とすればよい.

$$\begin{array}{ccc} \mathit{Aff}(\tilde{\Omega}, \mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ \Psi & & \Psi \\ \tilde{f} & \mapsto & \tilde{f}(\tilde{\omega}) \end{array}$$

$\longrightarrow$ $\tilde{\Omega}$ を V 内の凸集合 $\Omega := J(\tilde{\Omega})$ (*state space*) と同一視.

($J(\tilde{\omega})$ を ω と書くと, 1つ目の条件は $p\omega_1 + (1-p)\omega_2 \in \Omega$ を意味)

(*unit effect*)

$u(\omega) = 1 \quad (\forall \omega \in \Omega)$

$\longrightarrow$ $\tilde{\mathcal{E}}$ を V^* 内の部分集合 $\mathcal{E}_\Omega = [0, u] := \{e \in V^* \mid 0 \le e \le u\}$ (*effect space*) と同一視.

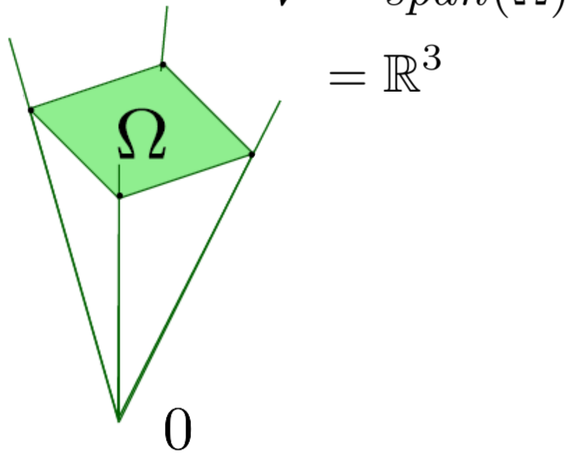
$\tilde{\mathcal{E}} = \tilde{\mathcal{E}}_{\tilde{\Omega}} = \{\tilde{g}\colon \tilde{\Omega} \to \mathbb{R} \mid \text{affine},\ \tilde{g}(\tilde{\omega}) \in [0,1]\}$

GPTs

数学的な仮定 2 : finite dimensionality

ベクトル空間 V の次元は有限：

$$\mathrm{dim}V = N+1 \quad (N<\infty).$$



- $span(\Omega) = V,\ 0 \notin \Omega$ より，Ω の“次元”は N $(\mathrm{dim}aff(\Omega) = N)$.

- N は状態の特定に必要な effect (“fiducial measurement”) の最小数に一致する.

→ 有限次元性の仮定 ＝ 有限個の測定で state tomography ができる

e.g.) qubit 系

Ω は $\mathbb{R}^4$ 内の3次元球 (Bloch球) → 3種類の測定により状態が特定できる.

GPTs

位相(距離)の導入

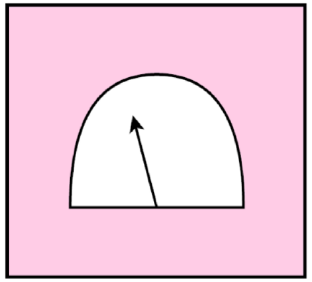
[8,18,23]
*他にも様々な位相の導入の仕方がある
(“物理的位相”など)

今回は state discrimination を介して位相(距離) を導入する*[23,24]:

ω_1 1/2

ω_2 1/2

$\omega_?$ ⇨



$e \in \mathcal{E}$

⇨ If “e”, answer ? = 1

If “not e”, answer ? = 2

$$\omega_1, \omega_2 \in \Omega$$

$$p_{\mathrm{success}}(e; \omega_1, \omega_2) = \frac{1}{2}e(\omega_1) + \frac{1}{2}(1 - e(\omega_2))$$

GPTs

位相(距離)の導入

$$p_{\mathrm{success}}(e;\omega_1,\omega_2) = \tfrac{1}{2}e(\omega_1) + \tfrac{1}{2}(1 - e(\omega_2)) \longrightarrow p_{\mathrm{opt}}(\omega_1,\omega_2) := \sup_{e\in\mathcal{E}} p_{\mathrm{success}}(e;\omega_1,\omega_2)$$

※ $p_{\mathrm{opt}}(\omega_1,\omega_2) \geqslant \frac{1}{2}$ ($e = u$ とすれば $p_{\mathrm{success}}(e;\omega_1,\omega_2) = \frac{1}{2}$)

⇩

$$\boxed{d(\omega_1,\omega_2) := 4\left(p_{\mathrm{opt}}(\omega_1,\omega_2) - \tfrac{1}{2}\right)}$$

により (Ω, d) は距離空間となる.

GPTs

数学的な仮定３: 完備性[8]

(Ω, d) は完備距離空間：

$$\lim_{n,m\to\infty} d(\omega_n, \omega_m) = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists \omega \in \Omega \text{ s.t. } \lim_{n\to\infty} d(\omega_n, \omega) = 0.$$

- 物理的には，無限個の混合・無理数係数の混合を認めることに対応.

- $\|\omega_1 - \omega_2\| = d(\omega_1, \omega_2)$ となる“良い”ノルム (base norm) が $V = span(\Omega)$ に導入できる

→ $(V, \|\cdot\|)$ は完備ノルム空間 (base norm Banach空間)

→ $(V, \|\cdot\|)$ は $\mathbb{R}^{N+1}$ と同一視できる (通常の Euclid 位相).

- Ω が $V = \mathbb{R}^{N+1}$ 内のコンパクト凸集合であることも示せる $\begin{cases} \text{端点：} \textit{pure state} \\ \text{それ以外の点：} \textit{mixed state} \end{cases}$

GPTs

Simple* formulation of a GPT [12-14,17]

statistical causality + 確率混合可能性 (+ minorな公理)

⇩

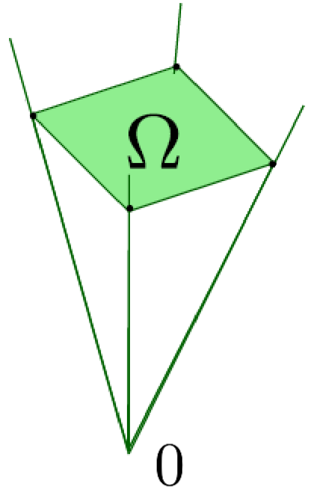
- Ω : $V := \mathbb{R}^{N+1}$ 内のコンパクト凸集合 s.t. $span(\Omega) = V,\ 0 \notin \Omega;$

- $\mathcal{E}_\Omega : V^*(\simeq V)$ 内の部分集合 $[0, u] := \{e \in V^* \mid 0 \leq e \leq u\}$，但し

$$e \leq f \underset{\text{def}}{\iff} (f-e)(\omega) \geq 0 \quad (\forall \omega \in \Omega), \quad u(\omega) = 1 \quad (\forall \omega \in \Omega)$$

の組 $(\Omega, \mathcal{E}_\Omega)$ を **一般確率論** (a ***GPT***) という．集合 $(\Omega, \mathcal{E}_\Omega)$ をそれぞれ ***state space***, ***effect space*** と呼び，元 $u \in V^*$ を ***unit effect*** と呼ぶ.

$V = span(\Omega)$
$= \mathbb{R}^3$



* 簡単のため，上記の公理に加え幾つかの数学的(物理的に自然でない?)仮定を課している.

GPTs

その他

[7,8,21]

- 今回紹介した表現定理は Stone-Gudder 流の埋め込みに沿ったもの (他の表現の仕方もある).

[25-28など]

- 今回は effect space の物理的構造 (effect algebra) には触れず，単に state space 上の関数の集合としての導入を行った.

- no-restriction hypothesis がない場合，effect space $\mathcal{E}$ は $\mathcal{E}_\Omega$ の(幾つかの物理的公理を満たす)部分集合となる.

[13,14]

- 無限次元の場合でもほぼ同様の定式化 (R^N が base norm Banach space とかになる)ができる.

- observable $\to$ $\{e_i\}_i$ s.t. $\sum_i e_i = u$ (より正確には normalized effect-valued measure)で定義.

- 古典(情報理論)論も GPTs の枠組みで記述できる :

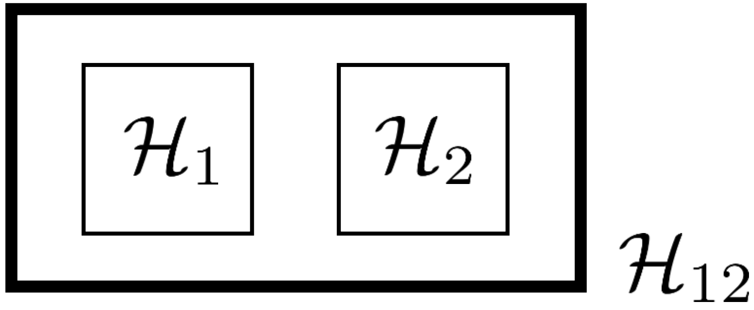
(確率)単体

$$\Omega_{\mathrm{CT}}(N+1) = \{(p_1, \ldots, p_{N+1}) \mid \textstyle\sum_{i=1}^{N+1} p_i = 1\}.$$

GPTs

合成系の記述

(例) 量子論

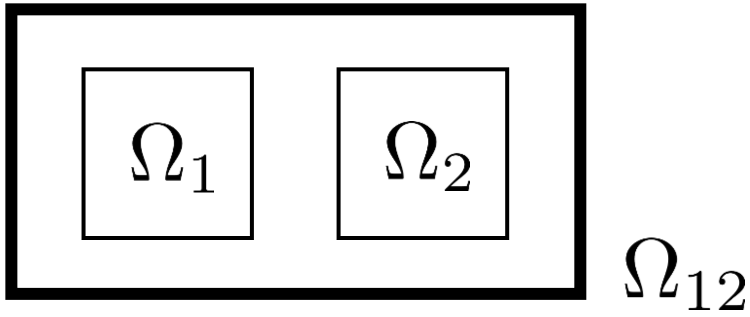


$$\mathcal{H}_{12} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$$

$$\left(\begin{array}{l} \Omega_1 = \Omega_{\mathrm{QT}}(\mathcal{H}_1),\ \Omega_2 = \Omega_{\mathrm{QT}}(\mathcal{H}_2) \\ \Rightarrow \Omega_{12} = \Omega_{\mathrm{QT}}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2) \end{array} \right)$$

物理的な公理だけからの導出はない(?) [29]

一般確率論



$$\Omega_{12} = ?$$

物理的な公理だけからどこまで定まるか?

GPTs

合成系の公理１

- 「Alice が $\omega_1 \in \Omega_1$ を(localに)準備・Bob が $\omega_2 \in \Omega_2$ を(localに)準備」は全体系 Ω_{12} の準備の1つ　→　$\exists \phi \colon \Omega_1 \times \Omega_2 \to \Omega_{12};$

- 「Alice が $e_1 \in \mathcal{E}_1$ を(localに)測定・Bob が $e_2 \in \mathcal{E}_2$ を(localに)測定」は全体系 $\mathcal{E}_{12}$ の測定の1つ　→　$\exists \psi \colon \mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_{12};$

- 上述の ϕ と ψ は bi-affine ($\phi(\sum_i p_i \omega_1^i, \omega_2) = \sum_i p_i \phi(\omega_1^i, \omega_2)$ など) ;

- $[\psi(e_1, e_2)](\phi(\omega_1, \omega_2)) = e_1(\omega_1) \cdot e_2(\omega_2) \quad (\forall \omega_i \in \Omega_i,\ e_i \in \mathcal{E}_i).$

GPTs

合成系の公理２

Ω_{12} 上の unit effect $u_{12} \in \mathcal{E}_{12}$ は $\psi(u_1, u_2)$ により与えられる：

$$u_{12} = \psi(u_1, u_2).$$

[30,31]

※　公理１ ＋　公理２　$\Longleftrightarrow$　$\forall \omega_{12} \in \Omega_{12}$　が "no-signaling principle" を満たす：

$$\forall e_1 \in \mathcal{E}_1, \quad \forall \{e_2^i\}_i, \ \{f_2^j\}_j \in \mathcal{O}_2,$$

$$\sum_i [\psi(e_1, e_2^i)](\omega_{12}) = \sum_j [\psi(e_1, f_2^j)](\omega_{12})$$ など

(より正確には，"partial state" が存在する)

GPTs

[9,11,22,32]

合成系の公理３: *Tomographic locality* (*local tomography* / *distinguishability*)

$\omega_{12},\ \omega'_{12} \in \Omega_{12}$ に対し,

$$[\psi(e_1, e_2)](\omega_{12}) = [\psi(e_1, e_2)](\omega'_{12}) \quad (\forall e_1 \in \mathcal{E}_1,\ e_2 \in \mathcal{E}_2)$$

$$\Rightarrow \quad \omega_{12} = \omega'_{12}.$$

$\rightarrow$ $V_{12}(\supset \Omega_{12})$ と $V_1(\supset \Omega_1),\ V_2(\supset \Omega_2)$ の間には

$$V_{12} = V_1 \otimes V_2$$

(特に $\Omega_{12} \subset V_1 \otimes V_2$.)

$\rightarrow$ $\phi(\omega_1, \omega_2) = \omega_1 \otimes \omega_2\ (\in V_1 \otimes V_2),\quad \psi(e_1, e_2) = e_1 \otimes e_2\ (\in V_1^* \otimes V_2^*).$

(特に $u_{12} = u_1 \otimes u_2$)

GPTs

合成系の記述

- $\Omega_{12} \subset V_1 \otimes V_2$ は $\omega_1 \otimes \omega_2$ の混合(凸包)を含む；

$$\Omega_{12} \supset \Omega_1 \otimes_{min} \Omega_2 := \{\textstyle\sum_i p_i \omega_1^i \otimes \omega_2^i\}$$

minimal tensor product

- $\Omega_{12} \subset V_1 \otimes V_2$ は $e_1 \otimes e_2$ に対し確率 ([0,1]) を返す；

maximal tensor product

$$\Omega_{12} \subset \Omega_1 \otimes_{max} \Omega_2 := \{\omega \in V_1 \otimes V_2 \mid (\forall e_1 \otimes e_2)(\omega) \in [0,1]\}$$

⇩

[33,34]

$$\boxed{\Omega_1 \otimes_{min} \Omega_2 \subset \Omega_{12} \subset \Omega_1 \otimes_{max} \Omega_2.}$$

（同様に $\mathcal{E}_1 \otimes_{min} \mathcal{E}_2 \subset \mathcal{E}_{12} \subset \mathcal{E}_1 \otimes_{max} \mathcal{E}_2$ ）

一般確率論における合成系

GPTs

その他

- $\Omega_1 \otimes_{min} \Omega_2$ の元を *separable*, $\Omega_1 \otimes_{max} \Omega_2 \setminus \Omega_1 \otimes_{min} \Omega_2$ の元を *entangled* という.

- $\Omega_1 \otimes_{min} \Omega_2 = \Omega_1 \otimes_{max} \Omega_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \Omega_1, \Omega_2$ のどちらか(両方)が単体(古典論). [35,36]

- (例) 量子論 [複素 Hilbert 空間]

$$\Omega_1 = \Omega_{\mathrm{QT}}(\mathbb{C}^{d_1}), \quad \Omega_2 = \Omega_{\mathrm{QT}}(\mathbb{C}^{d_2}) \quad \longrightarrow \quad \Omega_{12} = \Omega_{\mathrm{QT}}(\mathbb{C}^{d_1 d_2})$$

は consistent. [37]

$$(V_1 = \mathbb{R}^{d_1^2}, \quad V_2 = \mathbb{R}^{d_2^2}) \qquad (V_{12} = \mathbb{R}^{d_1^2 d_2^2} = V_1 \otimes V_2)$$

- (例) 量子論 [実 Hilbert 空間] (tomographic locality を満たさない)

$$\Omega_1 = \Omega_{\mathrm{QT}}(\mathbb{R}^{d_1}), \quad \Omega_2 = \Omega_{\mathrm{QT}}(\mathbb{R}^{d_2}) \quad \longrightarrow \quad \Omega_{12} = \Omega_{\mathrm{QT}}(\mathbb{R}^{d_1 d_2})$$

は inconsistent.

$$(V_1 = \mathbb{R}^{\frac{d_1^2 + d_1}{2}}, \quad V_2 = \mathbb{R}^{\frac{d_2^2 + d_2}{2}}) \qquad (V_{12} = \mathbb{R}^{\frac{d_1^2 d_2^2 + d_1 d_2}{2}} \neq V_1 \otimes V_2)$$

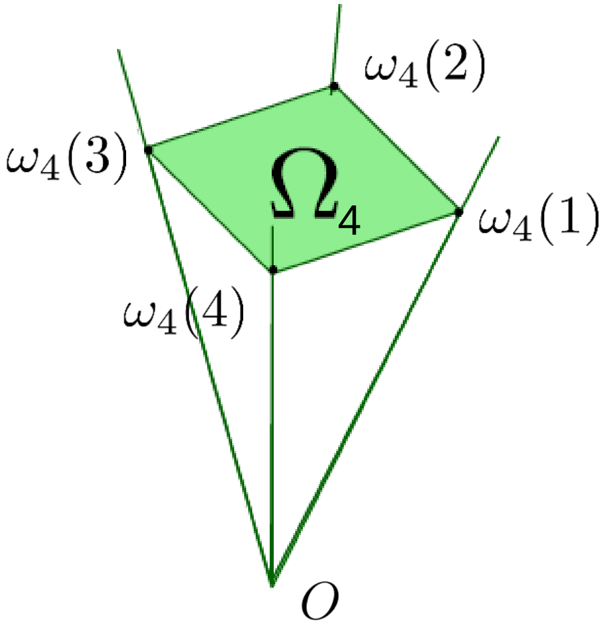
Contents

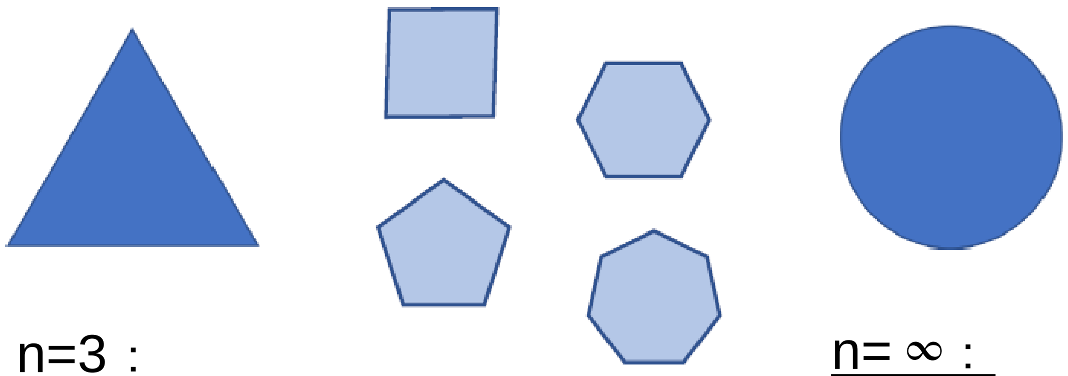
Regular polygon theories

正多角形理論 (state space) [38]

$$\Omega_n = conv(\{\omega_n(i)\}_{i=1}^{n}) \subset \mathbb{R}^3 \quad \text{with} \quad \omega_n(i) = \left(\cos\frac{2\pi i}{n},\ \sin\frac{2\pi i}{n},\ 1\right)$$

e.g.) n=4 $\quad V = \mathbb{R}^3$





n=3 :
古典 trit 系

$$conv\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

n= ∞ :
実係数 qubit 系

正多角形理論
→ 古典と量子の“中間”を表す

Regular polygon theories

不確定性関係 [18,39など]

量子論の“不確定性”の
特徴・本質とは？

(例) 量子論

- 状態準備の不確定性 (Preparation Uncertainty)

(例) [40,41]

$$\Delta_\rho q \cdot \Delta_\rho p \geq \frac{\hbar}{2}$$

(Δ : 標準偏差 [Kennard-Robertsonの不確定性関係])

[42,43など]

- 同時測定の不確定性 (Heisenberg の不確定性 / Measurement Uncertainty)

(例) [44]

$$\delta p \cdot \delta q \geqslant \frac{\hbar}{2}$$

(δ : “measurement noise” [Busch-Lahti-Wernerの不確定性関係])

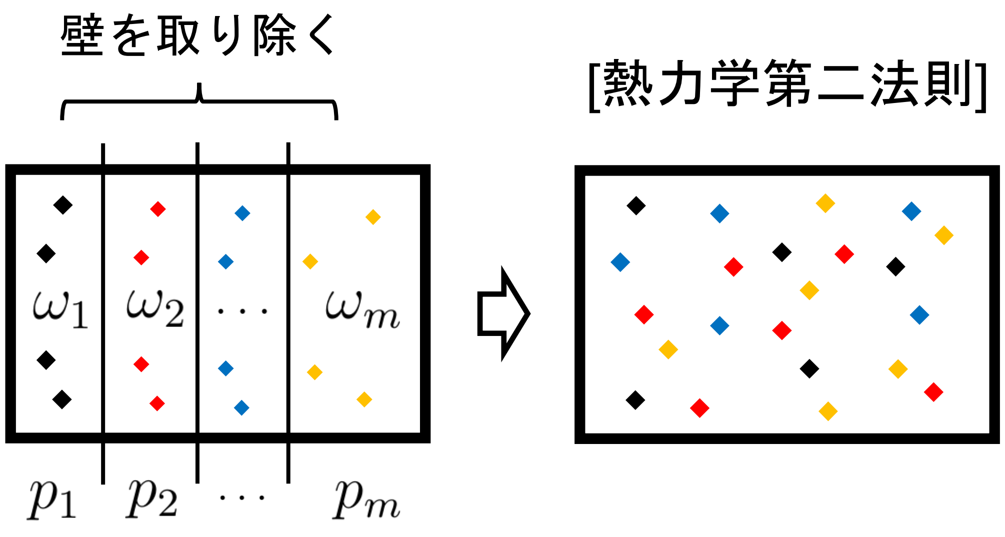
正多角形理論

- 状態準備の不確定性 (を示す測定の組)が存在 $\iff$ $n \neq 3,\ 4$
- 同時測定の不確定性 (を示す測定の組)が存在 $\iff$ $n \neq 3$ [45,46]

[47,48]
量子論と似たbound
が導出できる

Regular polygon theories

熱力学エントロピー (第二法則)



m “種類”の識別可能な状態 $\{\omega_i\}_{i=1}^m \subset \Omega_n$ が確率 $\{p_i\}_{i=1}^m$ で混合

$\rightarrow$ 系の状態：$\sum_{i=1}^m p_i\omega_i$

任意の識別可能な状態の組 $\{\omega_i\}_{i=1}^m \subset \Omega_n$ に対し,

$$S\left(\sum_{i=1}^m p_i\omega_i\right) = \sum_{i=1}^m S(\omega_i) - \sum_{i=1}^m p_i \log p_i$$

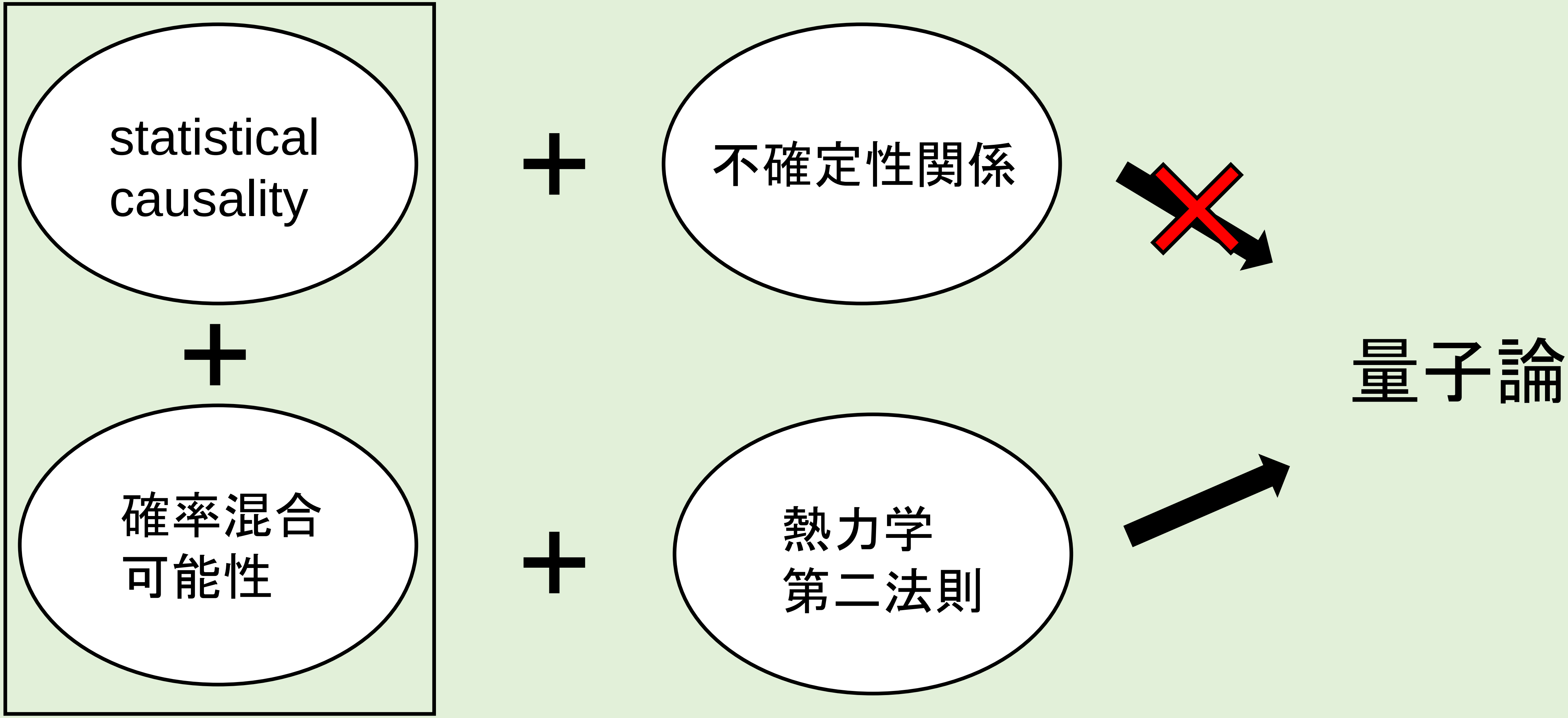
が成り立つような状態空間 Ω_n 上の関数(混合のエントロピー)が存在.

$\Longleftrightarrow$

$$n = 3 \quad \text{or} \quad \infty.$$ [49-51]

(古典 or 量子)

Regular polygon theories



GPTs (正多角形理論)　　「物理的な」公理

Others

その他

- 正多角形理論は “ <u>(weak) self-duality</u>” という性質を備えた state space のもっとも簡単な例[52-54など]

→　エンタングルメント・Bell-CHSH 不等式の破れと関連(?).[38,55]

- より一般の state space についても様々な考察が成されている：[12-16など]

古典論の特徴付け・導出は「物理的な公理」(例: cloning 可能性) から可能である

「物理的な公理」のみからの量子論の導出はできていない(?).

- 一般確率論をより“抽象化”した操作的確率論 (Operational Probabilistic Theories: OPTs) も近年盛んに研究されている.[56]

Summary

- 一般確率論(GPTs)の数学的定式化を与えた
  (state space を軸とした single system, bipartite system の記述).

- 正多角形理論に着目し，量子論の“物理的な”導出を試みた.

- 一般確率論を通して，量子論の本質にどこまで迫れるか.

References

[1] G. Ludwig, *Zeitschrift ftir Physik*, **181**, 233-260 (1964).

[2] G. Ludwig, "*An Axiomatic Basis for Quantum Mechanics: Derivation of Hilbert space structure*", vol 1. Springer-Verlag (1985).

[3] A. Hartkämper and H. Neumann eds. "*Foundations of Quantum Mechanics and Ordered Linear Spaces.*" Springer-Verlag (1974).

[4] G. W. Mackey, "*The mathematical foundations of quantum mechanics: a lecture-note volume*." W.A. Benjamin Inc. (1963).

[5] E. B. Davies and J. T. Lewis, *Communications in Mathematical Physics*, **17**, 239-260 (1970).

[6] C. M. Edwards and M. A, Gerzon, *Annales de l'institute Henri Poincaré. Section A, Physique Théorique*, **12**, 323-328 (1970).

[7] S. Gudder, *Communications in Mathematical Physics*, **29**, 249-264 (1973).

[8] S. Gudder, "*Stochastic Methods in Quantum Mechanics*." Dover (1979).

[9] L. Hardy, arXiv: quant-ph/0101012 (2001).

[10] H. Barnum et al, arXiv: quant-ph/0611295 (2006).

[11] J. Barrett, *Physical Review A*, **75**, 032304 (2007).

[12] M. Plávala, *Physics Reports*, **1033**, 1-64 (2023).

[13] L. Lami, PhD thesis, Universitat Autónoma de Barcelona (2017) (arXiv:1803.02902).

[14] R. Takakura, PhD thesis, Kyoto University (2022) (arXiv:2202.13834).

[15] 木村元，科学基礎論研究, **40** (2), 79-84 (2013).

[16] G. Chiribella and R. W. Spekkens eds. "*Quantum Theory; Informational Foundations and Foils.*" Springer Dordrecht (2016).

References

[17] G. Kimura et al. arXiv:1012.5361 (2010).

[18] P. Busch et al. “*Quantum Measurement*”, Springer Cham (2016).

[19] 荒木不二洋, 「量子場の数理」， 岩波書店 (1993).

[20] R. W. Spekkens, *Physical Review A*, **71**, 052108 (2005).

[21] M. H. Stone, *Annali di Matematica*, **29**, 25–30 (1949).

[22] G. Chiribella et al. *Physical Review A*, **81**, 062348 (2010).

[23] G. Kimura et al. *Journal of Mathematical Physics,* **51,** 093505 (2010).

[24] A. Jenčová, *Journal of Mathematical Physics,* **55,** 022201 (2014).

[25] D. J. Foulis and M. K. Bennett, *Foundations of Physics*, **24**, 1331 (1994).

[26] E. G. Beltrametti and S. Bugajski, *Journal of Mathematical Physics*, **38**, 3020-3030 (1997).

[27] S. Gudder and S. Pulmannová, *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, **39**, 645-659 (1998).

[28] S. Gudder, *International Journal of Theoretical Physics*, **38**, 3179-3187 (1999).

[29] S. Pulmannová, *Reports on Mathematical Physics*, **53**, 301-316 (2004).

[30] S. Popescu and D. Rohrlich, *Foundations of Physics*, **24**, 379-385 (1994).

[31] H. Barnum and A. Wilce, arXiv:1205.3833 (2012).

[32] G. Chiribella et al. Physical Review A, **84**, 012311 (2011).

References

[33] M. Kläy et al. *International Journal of Theoretical Physics*, **26**, 199–219 (1987).

[34] A. Wilce, *International Journal of Theoretical Physics*, **31**, 1915–1928 (1992).

[35] G. Aubrun et al. *Geometric and Functional Analysis,* **31**, 181–205 (2021).

[36] G. Aubrun et al. *Physical Review Letters*, **128**, 160402 (2022).

[37] H. Arai et al. arXiv:2301.04196 (2023).

[38] P. Janotta et al. *New Journal of Physics,* **13**, 063024 (2011).

[39] Stanford Encyclopedia of Philosophy, “*The Uncertainty Principle*”.

[40] E. H. Kennard, *Zeitschrift für Physik,* **44***,* 326–352 (1927).

[41] H. P. Robertson, *Physical Review*, 34, 163-164 (1929).

[42] W. Heisenberg , *Zeitschrift für Physik,* **43***,* 172–198 (1927).

[43] P. Busch et al. *Review of Modern Physics*. **86**, 1261 (2014).

[44] P. Busch et al. *Physical Review Letters*. **111**, 160405 (2013).

[45] M. Plávala, *Physical Review A,* **94**, 042108 (2016).

[46] Y. Kuramochi, *Positivity*, **24**, 1479–1486 (2020).

[47] R. Takakura and T. Miyadera, *Journal of Mathematical Physics*, **61**, 082203 (2020).

[48] R. Takakura and T. Miyadera, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **54**, 315302 (2021).

References

[49] M. Krumm et al. *New Journal of Physics*, **19**, 043025 (2017).

[50] R. Takakura, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical,* **52**, 465302 (2019).

[51] S. Minagawa et al. *Physical Review Research*, **4**, 033091 (2022).

[52] M. P. Müller and C. Ududec, *Physical Review Letters*, **108**, 130401 (2012).

[53] H. Barnum et al. *New Journal of Physics,* **16**, 123029 (2014).

[54] H. Barnum and A. Wilce, *Foundations of Physics*, **44**, 192-212 (2014).

[55] R. Takakura, arXiv:2401.04596 (2024).

[56] 中平健治, 「図式と操作的確率論による量子論」， 森北出版 (2022) .