

2次元量子ブラックホールにおける アイランドと量子収束仮説

近畿大学 田中亜花音

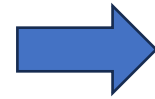
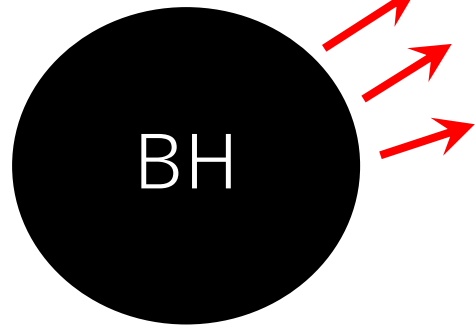
共同研究者：石橋明浩、松尾善典

arXiv:2403.19136[hep-th]

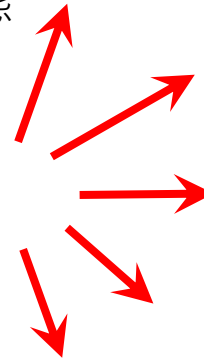
ブラックホール： 光すら出てくることのできない天体

ブラックホールの情報損失問題

純粋状態 Hawking 輻射



混合状態



「ユニタリー性の破れ？」

量子論的効果によりBHは熱輻射をする
[Hawking,1975]

量子重力理論の必要性



「量子情報理論」
からのアプローチ

収束定理

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = -\frac{1}{2}\theta^2 - \sigma^2 - R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \leq 0 \quad \overset{\text{膨張率}}{\theta} = \frac{1}{A} \frac{dA}{d\lambda}$$

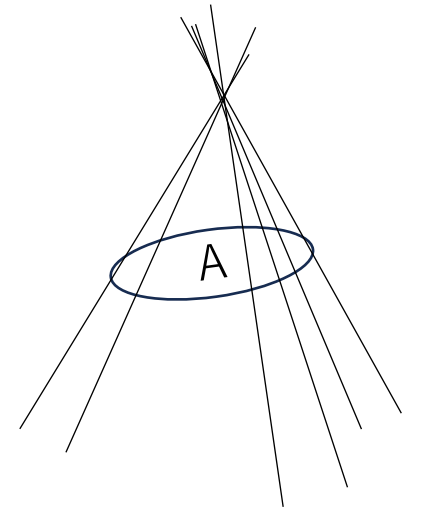
$$\text{光的エネルギー条件} : R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu = 8\pi T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0$$

A : 面積

λ : アフィンパラメータ

収束定理は粒子や光線束が収束することを示す

→ 重力の「**引力的性質**」表している



収束定理

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = -\frac{1}{2}\theta^2 - \sigma^2 - R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \leq 0 \quad \text{膨張率} \quad \theta = \frac{1}{A} \frac{dA}{d\lambda}$$

$$\text{光的エネルギー条件} : R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu = 8\pi T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0$$

面積Aは非減少である

λ : アフィンパラメータ

$$\rightarrow (\text{面積エントロピー}) \text{第二法則} : dS_{\text{BH}} \geq 0 \quad S_{\text{BH}} = \frac{\text{Area}}{4G_N}$$

[Bekenstein and Hawking, 1972]

ブラック
ホール

→ ブラックホール面積A

ブラックホールのエントロピーは
「どれだけ情報が隠れているか」を示す

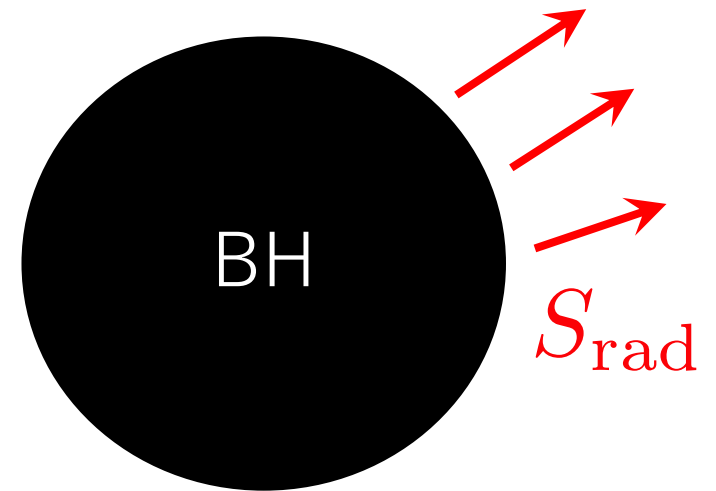
しかし、量子効果(例 Hawking放射)により収束定理
(したがって面積則)も破れる。

一般化エントロピー[Bekenstein,1973]

$$S_{\text{gen}} = \frac{\text{Area}}{4G_N} + S_{\text{rad}}$$

BHエントロピー

放射のエントロピー



一般化された第二法則

$$dS_{\text{gen}} \geq 0$$

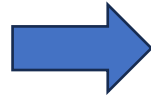
収束定理も量子効果を考慮したい

量子効果を考慮した収束定理を考える

BHエントロピー:

$$S_{\text{BH}} = \frac{\text{Area}}{4G_N}$$

量子効果



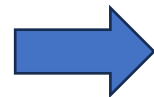
一般化エントロピー:

$$S_{\text{gen}} = \frac{\text{Area}}{4G_N} + S_{\text{rad}}$$

classical expansionにも量子効果を含める

classical expansion(古典膨張率):

$$\theta = \frac{1}{A} \frac{dA}{d\lambda}$$



quantum expansion(量子膨張率):[Bosso et al, 2016]

$$\Theta = \frac{1}{A} \frac{dS_{\text{gen}}}{d\lambda}$$

量子収束仮説(QFC)

$$\frac{d\Theta}{d\lambda} \leq 0$$

Quantum expansion

$$\Theta = \frac{1}{A} \frac{dS_{\text{gen}}}{d\lambda}$$

[Bosso-et al,2016]

Quantum expansionの定義

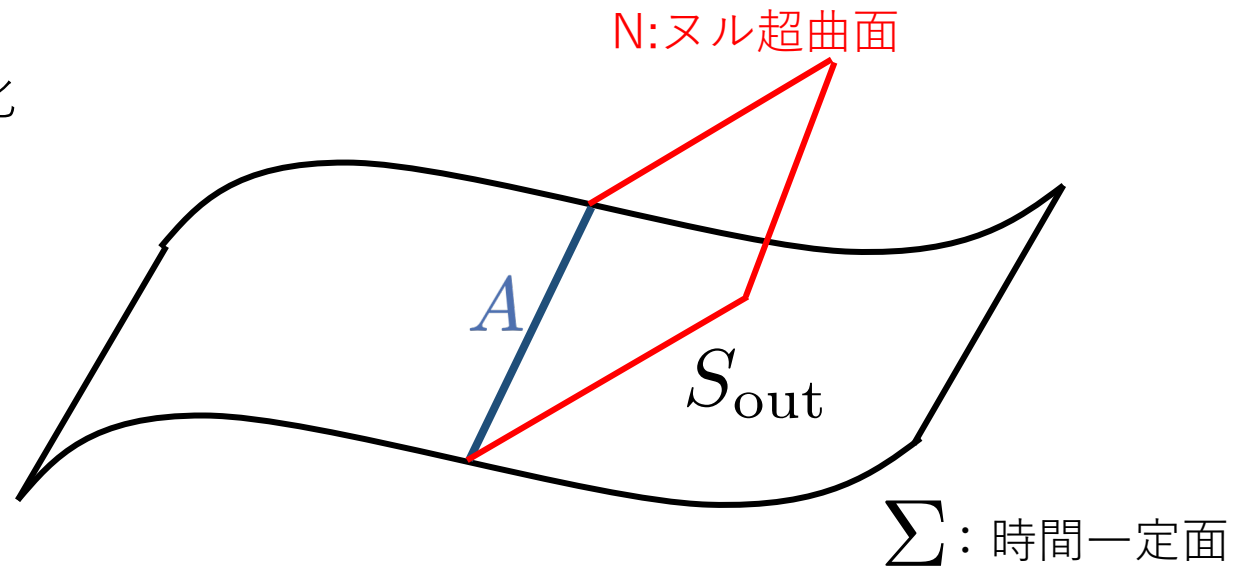
→ヌル超曲面Nに対する一般化エントロピーの変化

一般化エントロピー

$$S_{\text{gen}} = \frac{\text{Area}}{4G_N} + S_{\text{out}}$$

↑
境界部分

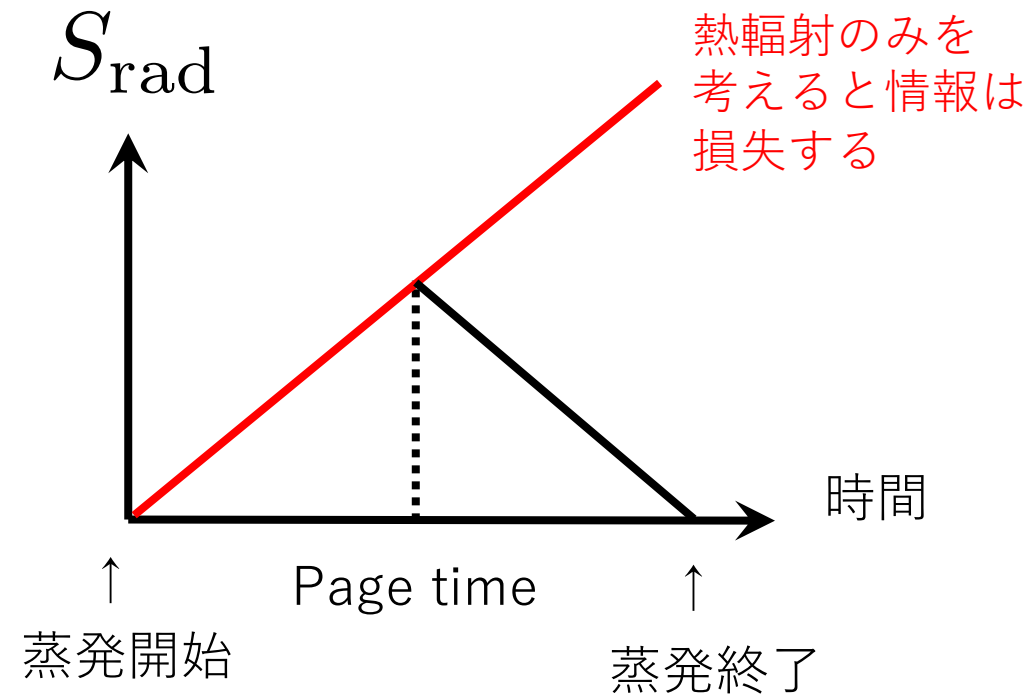
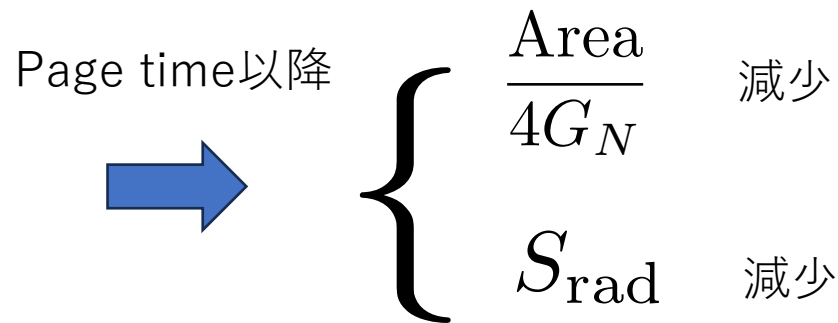
↙
物質に起因するEE



蒸発するBHの場合でQFCを考えてみる

S_{gen} をエンタングルメント・エントロピーと捉える

$$S_{\text{gen}} = \frac{\text{Area}}{4G_N} + S_{\text{rad}}$$



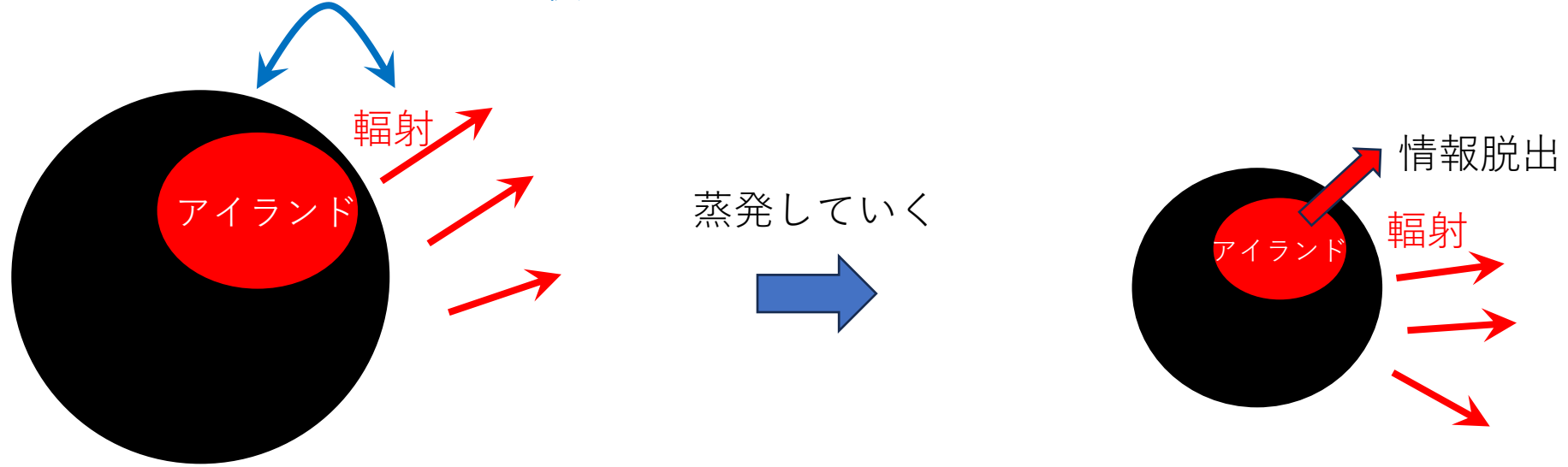
QFCは破れているように思える

図1:Page curve

アイランド仮説

→ユニタリー性の破れを回避する方法

BHと輻射は量子もつれ状態



ブラックホールに内部に「アイランド」領域がある
→「アイランド」領域は外とワームホールで繋がっている

量子もつれ状態は計算上解消される

情報損失問題は起こらない

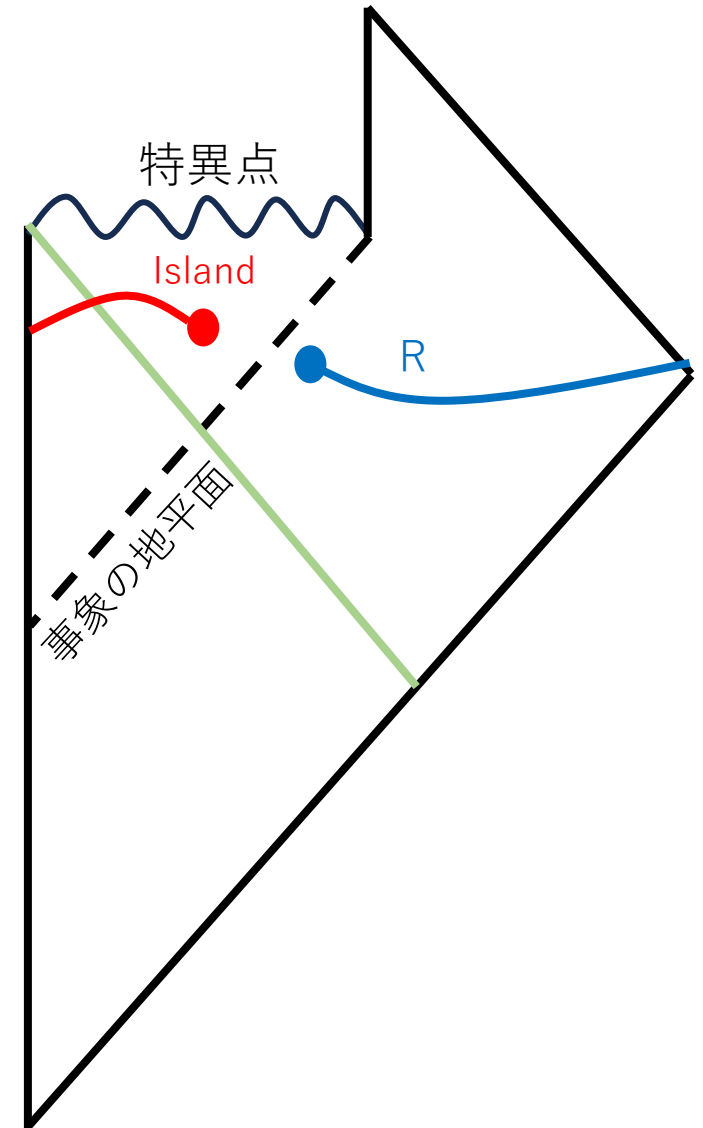
先行研究(Y.Matsuo 2023)

Page time 以降のisland形成を考慮し
4次元球対称時空でquantum expansionを計算

- Null surfaceに沿ってRの端点を動かす

→エンタングルメントエントロピーは
Page time以降も外向き光線方向増加する

Page time 以降もQFCは成り立つ



先行研究の問題点

- 4次元の量子重力理論は完成されていない
- 量子効果を時空のダイナミクスに取り入れることは技術的に困難
→BHの蒸発過程は人為的なモデル、**正当化可能か？**

$$S_{\text{gen}} = \frac{A}{4G_N} + S_{EE}$$

時空 \longleftrightarrow ? 量子論

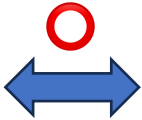
QFCを確かめるためには「時空」と「量子論」を統合的に考察する必要がある

解決案

- 2次元時空では量子時空のダイナミクスが解ける

→BHの蒸発過程は明らかである

$$S_{\text{gen}} = \frac{A}{4G_N} + S_{EE}$$

時空  量子論

2次元BHでQFCが成り立つかを確認したい

2次元BH

2次元BH(CGHSモデル) [G.Callan et al,1991]

古典的なdilaton gravity 作用を考える

作用

$$I_{\text{CGHS}} = \frac{1}{2\pi} \int d^2x \sqrt{-g} e^{-2\phi} \{R + 4(\nabla\phi)^2 + 4\lambda^2\}$$

ϕ :dilaton場

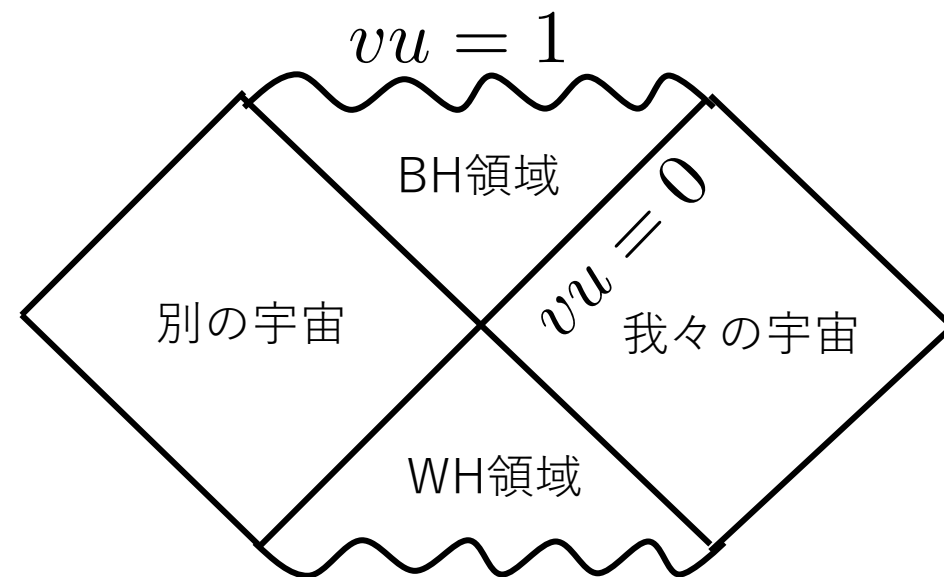
λ :長さのスケールを持つ
パラメータ

静的BH解

$$ds^2 = -\frac{dudv}{1-uv}$$

曲率特異点 : $vu = 1$

事象の地平面: $vu = 0$



2次元BH(RSTモデル) [G.Russo et al,1991]

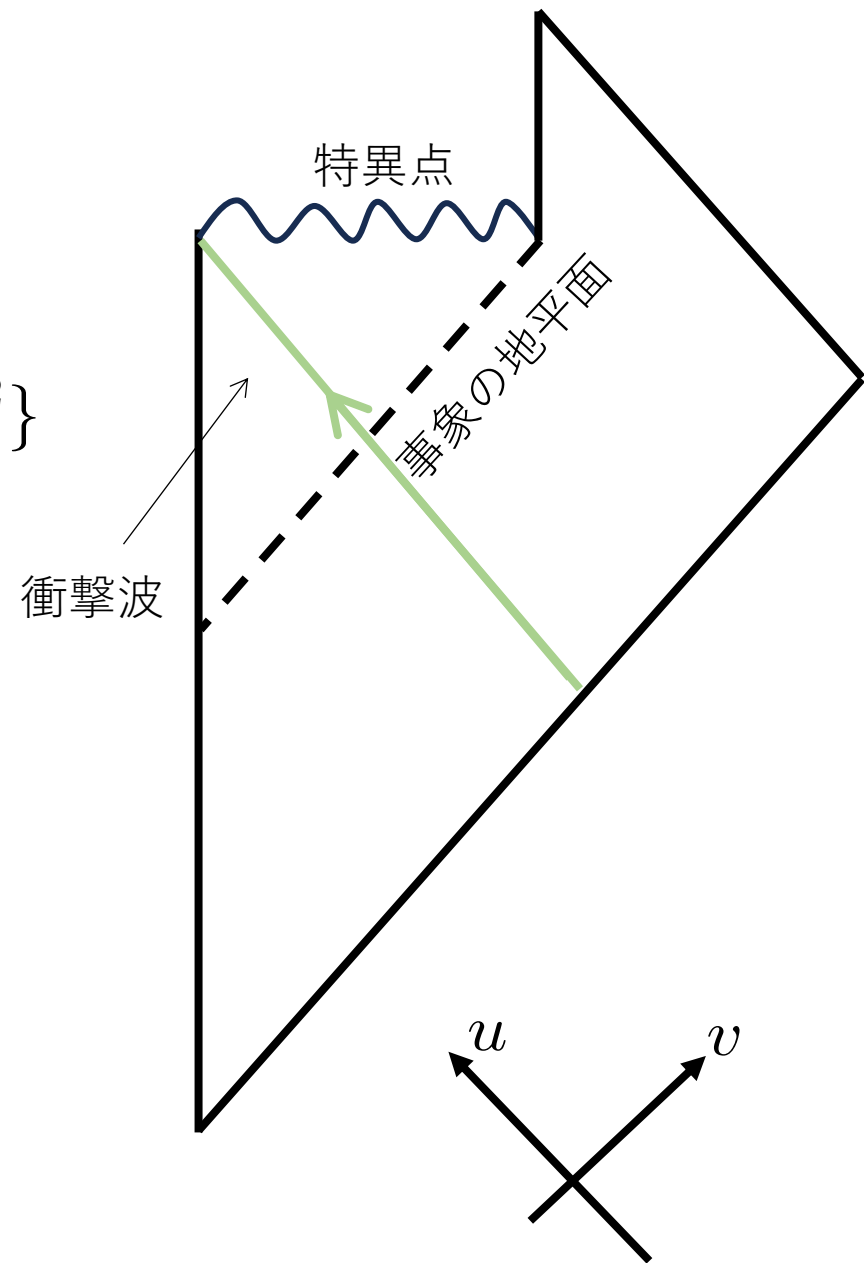
作用

$$\text{古典: } I_{\text{CGHS}} = \frac{1}{2\pi} \int d^2x \sqrt{-g} e^{-2\phi} \{R + 4(\nabla\phi)^2 + 4\lambda^2\}$$

$$\text{量子補正: } I_{\text{Q}} = -\frac{c}{12\pi} \int dx^+ dx^- \partial_+ \phi \partial_- \phi$$

$$\text{補正: } I_{\text{RST}} = \frac{c}{48\pi} \int d^2x \sqrt{-g} \phi R$$

この作用の元で蒸発するBHを考える



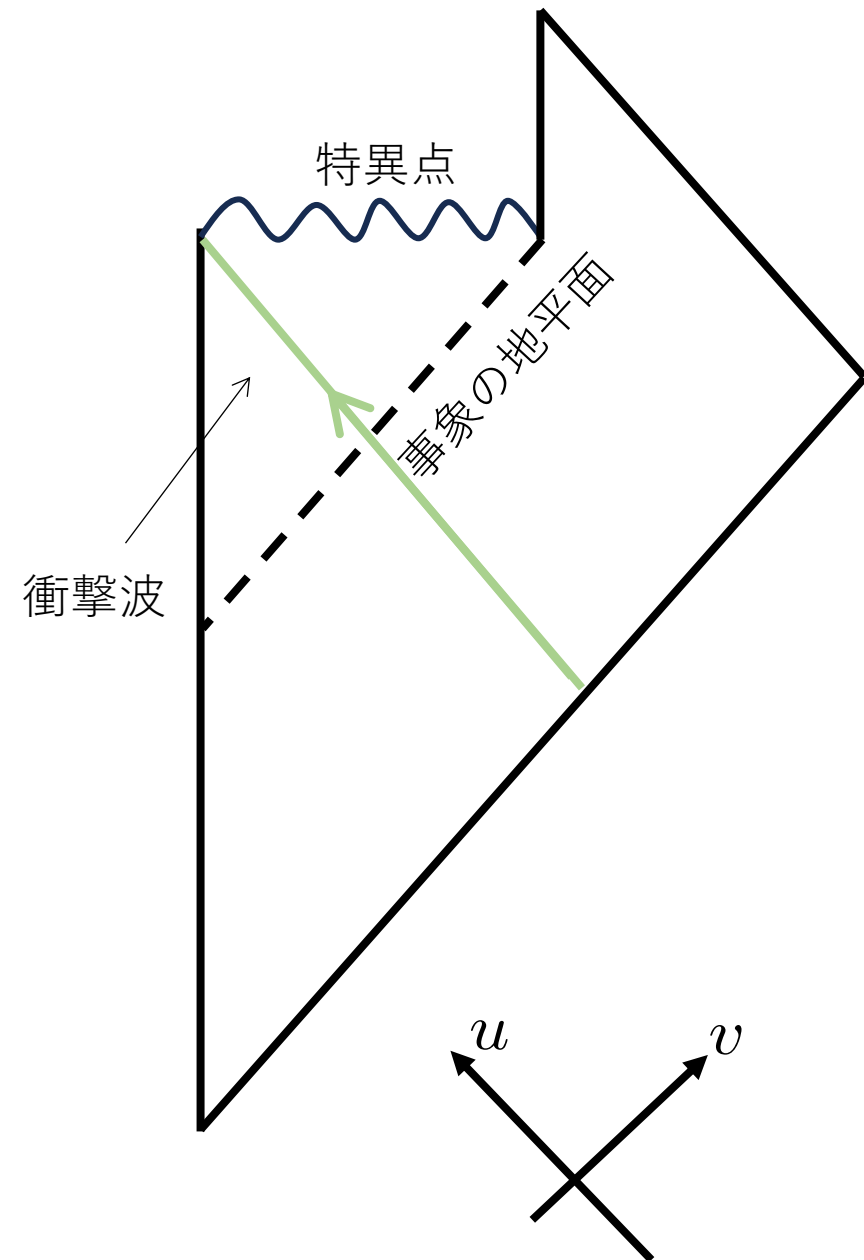
2次元BH(RSTモデル) [G.Russo et al,1991]

量子補正を加えた物質場をdilaton真空に入射させ
BHを形成する

量子効果の反作用を考慮した動的BH時空

$$\Omega = M(1 - v(u + 1) - \epsilon \log(-Muv))$$

場の変数: $\Omega = e^{-2\phi} + \frac{c}{24}\phi$



一般化エントロピー [F.F.Gautason et al,2020]

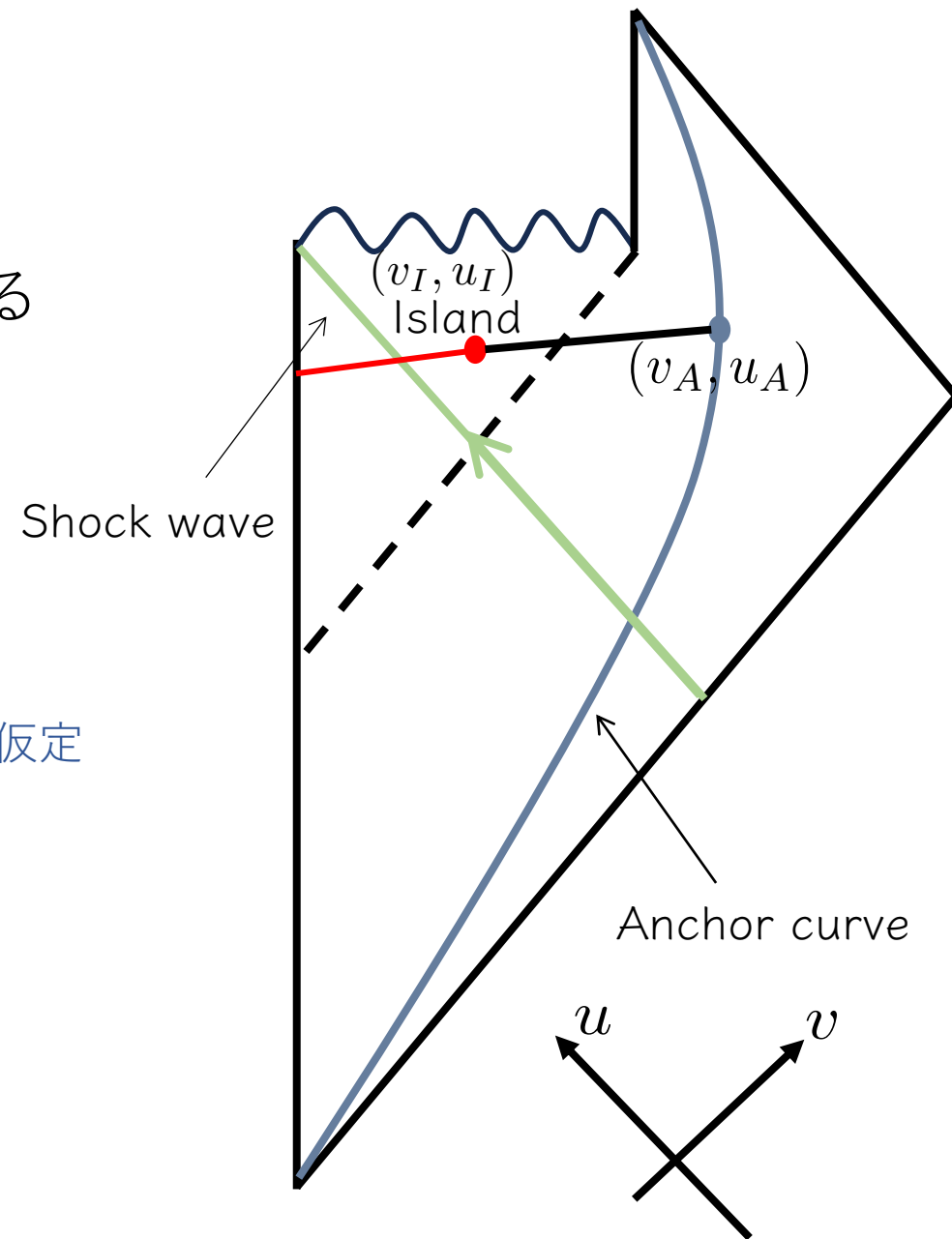
→islandを用いて
エンタングルメント・エントロピーを計算する

$$S_{\text{gen}} = \frac{\text{Area}(I)}{4G_N} + S_{\text{bulk}} + \frac{\text{Area}(A)}{4G_N}$$

Islandの寄与

Anchor curveを動かくと仮定

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{Area}(I)}{4G_N} = 2(\Omega(I) - \Omega_{\text{crit}}) \\ S_{\text{bulk}}[\mathcal{S}_{AI}] = \frac{c}{6} [d(A, I)^2 e^{\rho(A)} e^{\rho(I)}] \end{array} \right.$$



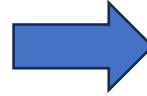
Result

①2次元quantum expansionの定義 [A.Ishibashi, Y.Matsuo, A.Tanaka 2024]

→ 2次元のquantum expansionの定義は定まっていない

Quantum expansion

$$\Theta = \frac{1}{A} \frac{dS_{\text{gen}}}{d\lambda}$$



2次元Quantum expansion(新しく定義)

$$\Theta = \frac{1}{\Omega} \frac{dS_{\text{gen}}}{d\lambda}$$

$$\Omega = e^{-2\phi} + \frac{c}{24}\phi$$

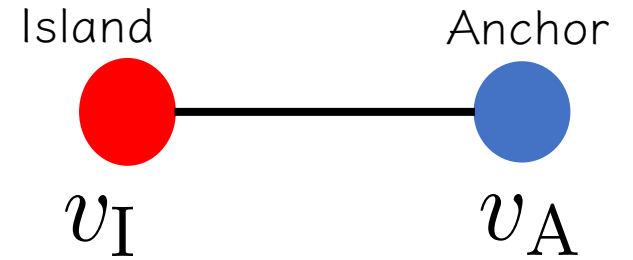
$$S_{\text{gen}} = \frac{\text{Area}(I)}{4G_N} + S_{\text{bulk}} + \frac{\text{Area}(A)}{4G_N}$$

②2次元quantum expansionの計算 [A.Ishibashi, Y.Matsuo, A.Tanaka 2024]

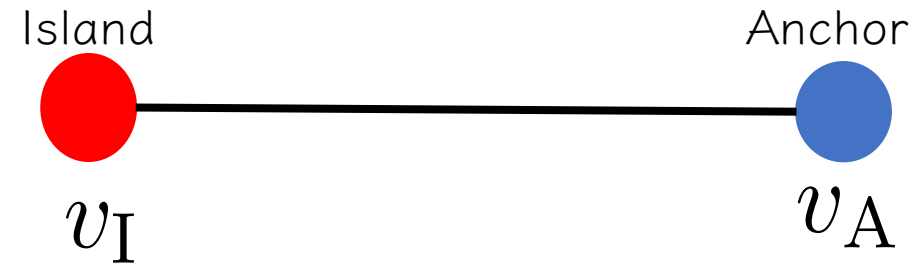
Expansion parameter: $\epsilon = \frac{c}{48M} \ll 1$

IslandとAnchor curveの距離で場合分けする

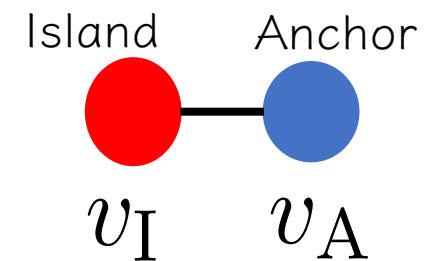
(I) $\epsilon \ll -v_A(1 + u_A) \ll 1$



(II) $-v_A(1 + u_A) = O(1)$



(III) $-v_A(1 + u_A) \sim \epsilon$



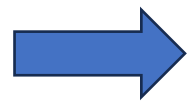
②2次元quantum expansionの計算 [A.Ishibashi, Y.Matsuo, A.Tanaka 2024]

$$(I) \epsilon \ll -v_A(1 + u_A) \ll 1$$

$$\Omega = M(1 - v(u + 1) - \epsilon \log(-Muv)) \simeq 1$$

Quantum expansionは次のように近似できる

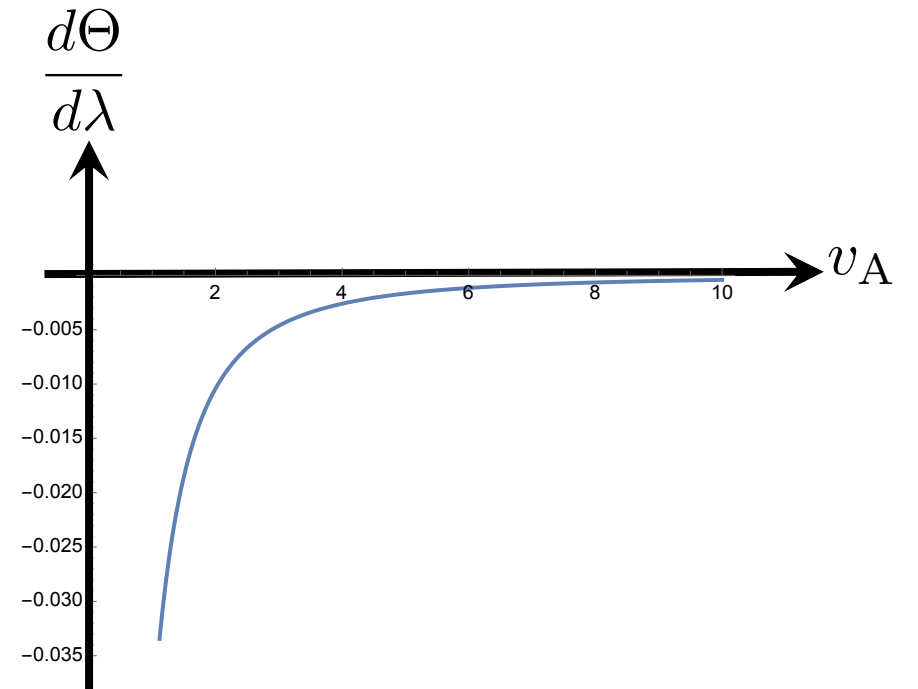
$$\Theta \simeq \frac{dS_{\text{gen}}}{d\lambda}$$



$$\frac{d\Theta}{d\lambda} = -\left(\frac{\partial v_A}{\partial x^+}\right) \frac{c}{24} \frac{1}{v_A^2} < 0$$

Islandありとなしで結果は同じ

QFCを満たす



Islandとno-islandのグラフ

まとめ

- 4次元時空では量子効果を取り入れるのが技術的に困難
 - 2次元では量子場の反作用を取り入れて、時空ダイナミクスが解けることに着目
- 2次元でのquantum expansionを適切に定義し、QFCが成り立つことを証明した

今後の展望

- 2次元と高次元の対応関係を調べ、一般次元での議論も進めたい

②2次元quantum expansionの計算

$$(II) \quad -v_A(1 + u_A) = O(1)$$

$$\text{Quantum expansion: } \Theta = \frac{1}{\Omega} \frac{dS_{\text{gen}}}{d\lambda} = \partial_v \left(\frac{e^{-2\rho}}{\Omega} \partial_v S_{\text{gen}} \right)$$

各項の計算をする(islandありの場合)

$$\frac{e^{-2\rho}}{\Omega} \simeq 1 + \frac{c}{48\Omega} \log \Omega \rightarrow \varepsilon \text{ の2次以降は落とす}$$

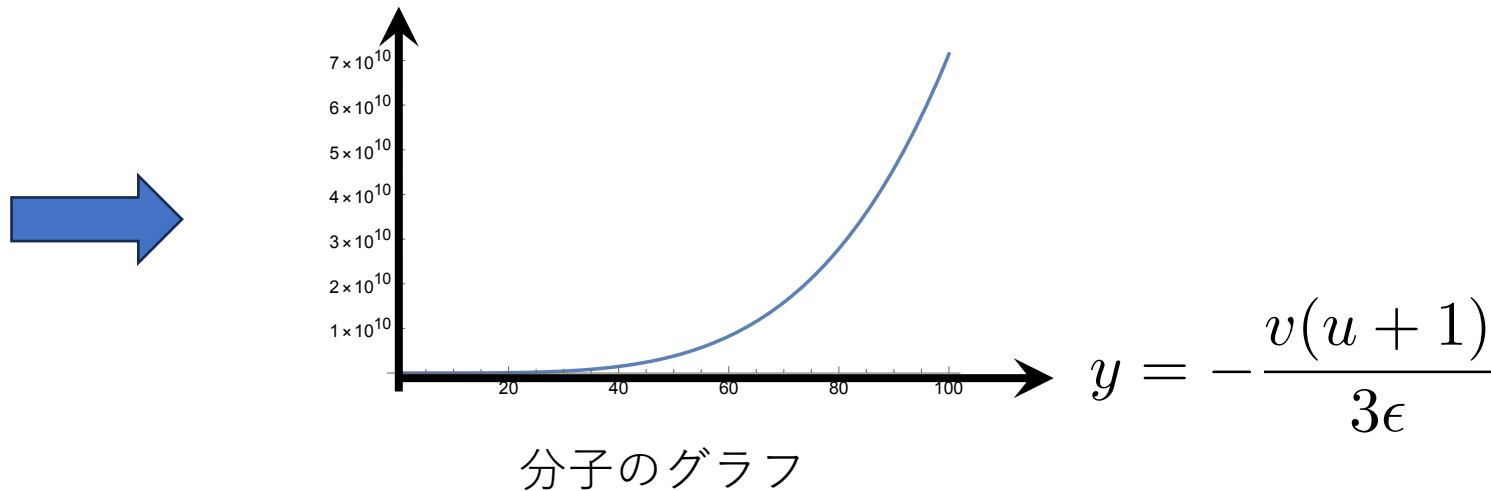
$$\partial_{v_A} S_{\text{gen}}^{\text{island}} = -2M(1 + u_A) + \frac{c}{6} \frac{1}{\log \frac{-v_A(u_A+1)}{3\varepsilon}} + \frac{c}{12} \frac{1 + u_A}{1 - v_A(1 + u_A)} + \frac{c}{24} \frac{1}{v_A}$$

②2次元quantum expansionの計算

$$(II) \quad -v_A(1 + u_A) = O(1)$$

$$\frac{d\Theta}{d\lambda} = -\frac{c}{24} \frac{[1 - v(u + 1)]^2 [2 + \log(-\frac{v(u+1)}{3\epsilon})]^2 + [\log(-\frac{v(u+1)}{3\epsilon})]^2 (1 + u)^2 v^2 [\log(M(1 - v(u + 1))) - 3]}{v^2 [1 - v(u + 1)]^2 [\log(-\frac{v(u+1)}{3\epsilon})]^2}$$

分子の部分が正になればQFCが成り立っていることが言える



QFCを満たす

no-islandの場合も同様の議論で証明できる

②2次元quantum expansionの計算

$$(III) \quad -v_A(1+u_A) \sim \epsilon$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta}{d\lambda} &= \partial_{v_A} \left(\frac{e^{-2\rho}}{\Omega} \partial_{v_A} S_{\text{gen}}^{\text{island}} \right) \\ &= \underbrace{\frac{\partial}{\partial v_A} \left(\frac{e^{-2\rho}}{\Omega} \partial_{v_A} S_{\text{gen}}^{\text{island}} \right)}_{\text{正}} + \underbrace{\frac{\partial v_I}{\partial v_A}}_{\text{負であるべき}} \underbrace{\frac{c}{6v_A v_I (\log \frac{v_A}{v_I})^2}}_{\text{正}} \end{aligned}$$

$\frac{\partial v_I}{\partial v_A}$ が負であることを確認する

②2次元quantum expansionの計算

$$(III) \quad -v_A(1 + u_A) \sim \epsilon$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \frac{\partial S_{\text{gen}}^{\text{island}}}{\partial v_I} \\ 0 = \frac{\partial S_{\text{gen}}^{\text{island}}}{\partial u_I} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{組み合わせる} \\ \longrightarrow \\ v_I \gg 1 \\ u_I \sim -1 \end{array}$$

