量子有限準位系における擬確率分布

梅川 舜 [1], 李 宰河 [2], 羽田野 直道 [2]

[1] 東大理, [2] 東大生研

Quantum Foundations 2024 2024. 3. 12

S. Umekawa, J. Lee, N. Hatano, Prog. Theor. Exp. Phys. **2024(2)** 023A02 (2024)

Section 1

擬確率分布の一般的枠組み

擬確率とは

量子論 : 互いに非可換な物理量の値は同時に確定しない
→ 同時確率分布は定義できない

擬確率 : 複素数値を取る「確率のようなもの」
周辺分布について正しい

$$\int_{\mathbb{R}} P_{(A,B)}(a,b)\,\mathrm{d}b = P_A(a) = \mathrm{Tr}[\rho E_A(a)] \tag{1}$$

→ 規格化条件も保たれている。

$$\int\int P_{(A,B)}(a,b)\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b = 1 \tag{2}$$

$E_A(a)$ は A の固有値 a への射影演算子 (スペクトル測度)

擬確率とは

擬確率：周辺分布について整合的な複素数値の「確率」
▷ 定義が一意ではない

→ 様々な定義の擬確率が提唱されてきた
（例）Wigner 分布[1]
：非古典性の指標として量子光学などでの応用[2]
Kirkwood-Dirac 分布[3,4]
：弱値[5]の統計的解釈を与える

---

[1] E. Wigner, Phys. Rev. (1932)
[2] A. Kenfack and K. Życzkowski, J. Opt. B (2004)
[3] J. G. Kirkwood, Phys. Rev. (1933)
[4] P. A. M. Dirac, Rev. Mod. Phys. (1945)
[5] Y. Aharonov, D. Z. Albert, and L. Vaidman, Phys. Rev. Lett. (1988)

通常の１変数の場合

1 変数の確率分布（Born 則）

$$P_A(a) = \mathrm{Tr}[E_A(a)\rho] \tag{3}$$

1 変数関数の量子化（スペクトル分解）

$$f(A) = \int_{-\infty}^{\infty} f(a)\, \mathrm{d}E_A(a)$$

指数関数の量子化 = フーリエ変換

$$e^{-isA} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isa}\, \mathrm{d}E_A(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}(E_A(a)) \tag{4}$$

$$\longrightarrow \quad E_A(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-isA}\right) \tag{5}$$

擬確率分布の一般的枠組み

Quasi-Joint-Spectral Distribution (QJSD)[6,7]

物理量の組 $\boldsymbol{A} = (A_1, \ldots, A_n)$

$$\#_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{a}) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}\mathcal{F}^{-1}\Big(\hat{\#}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{s})\Big) \quad (\boldsymbol{a} \text{ は } \boldsymbol{A} \text{ の値}) \tag{6}$$

$$\hat{\#}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{s}) := \Big(e^{-is_1A_1}, e^{-is_2A_2}, \ldots, e^{-is_nA_n} \text{ を “任意に分解して適当な順序で混合したもの”}\Big) \tag{7}$$

（例）

$$\hat{\#}^K_{(A,B)}(s,t) = e^{-isA}e^{-itB} \tag{8}$$

$$\hat{\#}^W_{(A,B)}(s,t) = e^{-i(sA+tB)} \tag{9}$$

$$\hat{\#}^S_{(A,B)}(s,t) = e^{-i\frac{s}{2}A}e^{-itB}e^{-i\frac{s}{2}A} \tag{10}$$

(8) 式: Kirkwood-Dirac 分布　(9) 式: (一般化)Wigner 分布

[6] J. Lee and I. Tsutsui, Prog. Theor. Exp. Phys. (2017)

[7] J. Lee and I. Tsutsui, Springer Proc. Math. Stat. (2018)

擬確率分布の一般的枠組み

Quasi-Joint-Spectral Distribution (QJSD)

$$\#_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{a}) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}^{n}} \mathcal{F}^{-1}\left(\hat{\#}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{s})\right)$$

$$\hat{\#}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{s}) := \Big(e^{-is_1A_1}, e^{-is_2A_2}, \dots, e^{-is_nA_n} \text{ を “任意に分解して適当な順序で混合したもの”}\Big)$$

擬 (同時) 確率分布 [6]

$$P_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{a}) = \mathrm{Tr}[\#_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{a})\rho] \tag{11}$$

多変数関数の量子化 [7]

$$f(\boldsymbol{A}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{a})\,\#_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{a})\,\mathrm{d}^n\boldsymbol{a} \tag{12}$$

---

[6] J. Lee and I. Tsutsui, Prog. Theor. Exp. Phys. (2017)
[7] J. Lee and I. Tsutsui, Springer Proc. Math. Stat. (2018)

Section 2

擬確率分布の性質

発表概要

擬確率分布の一般的枠組みのもと、

1. 分布の台とスペクトルの関係（確率らしさ）
2. 擬古典化表現の忠実性（有用性）

の観点から二準位系や三準位系では Kirkwood-Dirac 分布が他の分布と比べて良い性質を示すことを示した

S. Umekawa, J. Lee, N. Hatano, Prog. Theor. Exp. Phys. **2024(2)** 023A02 (2024)

分布の台とスペクトルの関係

量子論においては、物理量の値はそれを表す演算子のスペクトル（固有値）のみを取る
→ その物理量の確率分布の台はスペクトルに含まれる

$$\mathrm{supp}(P_A(a)) \subset \sigma(A) \tag{13}$$

→ 擬確率分布ではどうか？
分布の台は各物理量のスペクトルの直積に含まれるか？

$$\mathrm{supp}(P_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{a})) \overset{?}{\subset} \sigma(A_1) \times \cdots \times \sigma(A_n) \tag{14}$$

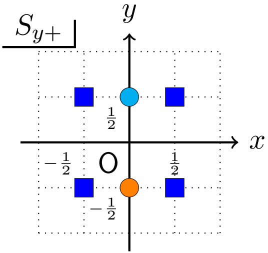
分布の台とスペクトルの関係

擬確率分布の台は各物理量のスペクトルの直積に含まれるか？

$$\mathrm{supp}(P_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{a})) \overset{?}{\subset} \sigma(A_1) \times \cdots \times \sigma(A_n) \tag{15}$$

$\longrightarrow$ 一般には NO！

(反例) 二準位系におけるスピン x と y についての分布
(このときスペクトル（固有値）の組は $(\pm 1/2, \pm 1/2)$)



QJSD $\hat{\#}^{S}_{(J_x, J_y)}(s,t) = e^{-i\frac{s}{2}J_x} e^{-itJ_y} e^{-i\frac{s}{2}J_x}$

により定まる状態 $|y+\rangle$ における分布

■: $+\frac{1}{4}$ ●: $+\frac{1}{2}$ ●: $-\frac{1}{2}$

分布の台は $(\pm 1/2, \pm 1/2)$, $(0, \pm 1/2)$

分布の台とスペクトルの関係

擬確率分布の台は各物理量のスペクトルの組に含まれるか？

$$\mathrm{supp}(P_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{a})) \overset{?}{\subset} \sigma(A_1) \times \cdots \times \sigma(A_n) \tag{16}$$

⟶ 一般には NO！
⟶ では、どの擬古典化の方法なら分布の台はスペクトルの直積に含まれるか？

命題 1 (Kirkwood-Dirac 分布の台 [8])

N 準位系において、任意の物理量の組 $(A_1, \ldots, A_n)$ についての Kirkwood-Dirac 分布の台はスペクトルの直積に含まれる

$$\mathrm{supp}\left(P^{\mathrm{K}}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{a})\right) \subset \sigma(A_1) \times \cdots \times \sigma(A_n) \tag{17}$$

[8] S.Umekawa, J.Lee, N.Hatano, Prog. Theor. Exp. Phys. **2024(2)** 023A02 (2024)

分布の台とスペクトルの関係 (参考)

A の値が a だとわかっている状態 (状態 $|a\rangle$) においては
A と B についての同時分布の台が $\{(a,b)\,|\,b\in\mathbb{R}\}$ に
含まれているとより「確率らしい」

命題 2 (固有状態における擬確率の台 [9])

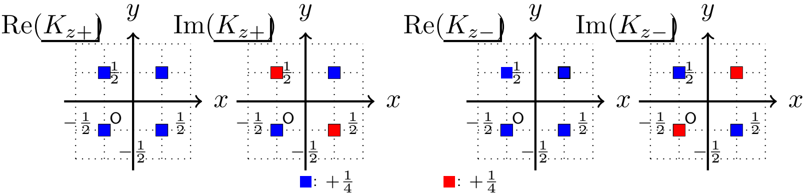
2 つの物理量 A, B についての擬確率分布のうち、
A の固有状態 $|a\rangle$ では $a' \neq a$ において $P_{(A,B)}(a', b) = 0$ で、
かつ B の固有状態 $|b\rangle$ では $b' \neq b$ において $P_{(A,B)}(a, b') = 0$
となるものは Kirkwood-Dirac 型の分布に限られる。

[9] H. F. Hofmann, Quantum Stud.: Math. Found. (2014)

擬古典化表現[7]の忠実性

擬古典化は忠実な表現か？
N 準位系 : $N^2 - 1$ 個の物理量の期待値の組で指定
擬確率分布 $\to$ 周辺分布 $\to$ 期待値

$\longrightarrow$ 少ない物理量についての分布でも状態を表せるか？
(例)$|z\pm\rangle$ 状態のスピン x, y についての Kirkwood-Dirac 分布



$\to$ x と y についての分布から z 方向の違いもわかる！

[7] J. Lee and I. Tsutsui, Springer Proc. Math. Stat. (2018)

擬古典化表現の忠実性

擬古典化は忠実な表現か？
少ない物理量についての分布でも系の状態を表せるか？

命題 3: 二準位系, Kirkwood-Dirac 分布
命題 4: 二準位系, 一般の擬確率
命題 5: 三準位系, Kirkwood-Dirac 分布

擬古典化表現の忠実性

擬古典化は忠実な表現か？
少ない物理量についての分布でも系の状態を表せるか？

→ 二準位系の場合、擬古典化の方法によっては x と y についての分布で z 方向の違いも表せる。

命題 3 (Kirkwood-Dirac 分布表現の忠実性[8])

二準位系の任意の状態は任意の互いに非可換な 2 つの物理量[10] の組についての Kirkwood-Dirac 分布で完全に識別される。

---

[8] S.Umekawa, J.Lee, N.Hatano, Prog. Theor. Exp. Phys. **2024(2)** 023A02 (2024)
[10] 二準位系においては物理量は本質的にスピンしかない

擬古典化表現の忠実性

→ どの擬古典化の方法であれば x と y についての分布で z 方向の違いもわかるか？
（二準位系の状態を忠実に表現できるか？）

命題 4 (表現が忠実となるための条件 [8])

スピン x と y についての擬確率分布が二準位系の状態を忠実に表現するための必要十分条件 [11] は、対応する QJSD が非エルミート (すなわち分布が虚部を持ち得る) であることである。

→ 擬確率の虚部が z 方向の情報を持っている！

[8] S.Umekawa, J.Lee, N.Hatano, Prog. Theor. Exp. Phys. **2024(2)** 023A02 (2024)
[11] QJSD の範囲を少し絞っています。

擬古典化表現の忠実性

少ない物理量についての分布でも系の状態を表せるか？
→ 二準位系の場合、擬古典化の方法によっては x と y についての分布で z 方向の違いも表せる。

→ もっと大きな次元の系では？

命題 5 (三準位系での KD 表現の忠実性[8])

三準位系の任意の状態は (スピン 1 表現の) スピン x と y についての Kirkwood-Dirac 分布で完全に識別される。

[8] S.Umekawa, J.Lee, N.Hatano, Prog. Theor. Exp. Phys. **2024(2)** 023A02 (2024)

擬古典化表現の忠実性

2 つの物理量についての分布で忠実となる大雑把な理由:
n 個の物理量についての Kirkwood-Dirac 分布の成分 $O(N^n)$
$\leftrightarrow$ N 準位系の状態のもつ自由度 $O(N^2)$
$\rightarrow$ 縮退に対する制限

命題 6 (縮退に対する条件[8])

N 準位系において、異なる固有値を N_A, N_B 個持つ 2 つの物理量についての Kirkwood-Dirac 分布が忠実な表現となるなら

$$2N^2 - 1 \leq (2N_A - 1)(2N_B - 1) \tag{18}$$

[8] S.Umekawa, J.Lee, N.Hatano, Prog. Theor. Exp. Phys. **2024(2)** 023A02 (2024)

まとめ

擬確率分布の一般的枠組みのもと、

1. 分布の台とスペクトルの関係（確率らしさ）
2. 擬古典化表現の忠実性（有用性）

の観点から二準位系や三準位系では Kirkwood-Dirac 分布が他の分布と比べて良い性質を示すことを示した

S. Umekawa, J. Lee, N. Hatano, Prog. Theor. Exp. Phys. **2024(2)** 023A02 (2024)