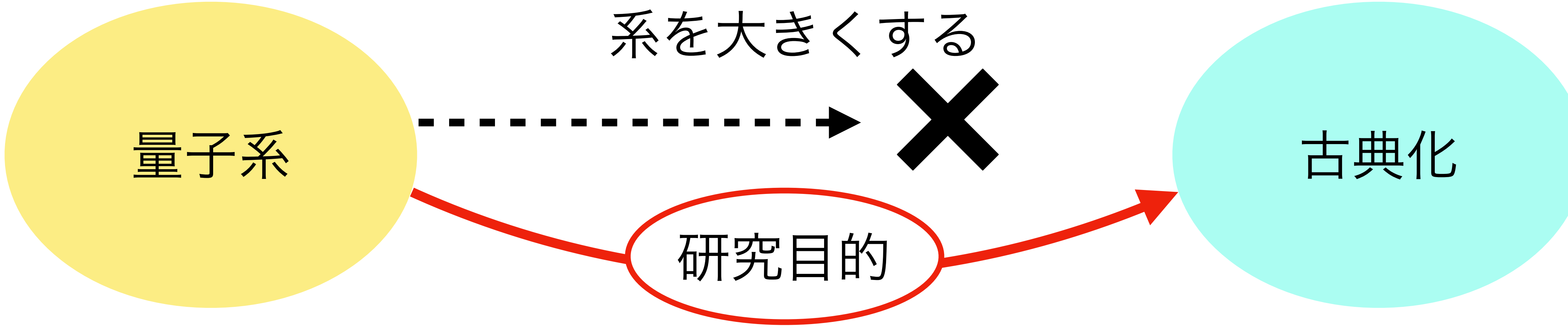
量子スピン系における状態空間の次元を削減する粗視化測定による古典化について

京都大学大学院工学研究科　　　山本 有理子，宮寺隆之

概要：粗視化測定を用いた古典化



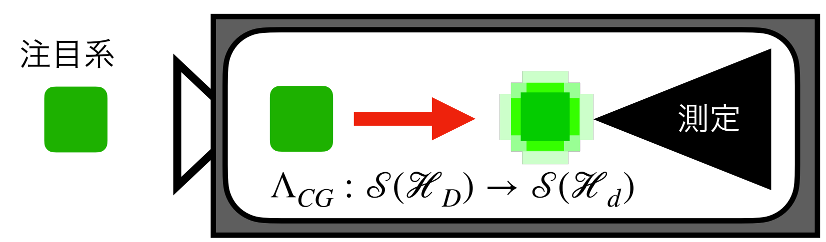
先行研究：測定時の情報の欠如

① いくつかの固有値を同じ値として返す物理量 → **粗視化測定**

J. Kofler and Č. Brukner, Phys. Rev. Lett. **99**, 180403 (2007)

② 状態空間の次元を削減するような量子チャネル → **粗視化操作**

C. Duarte, G. D. Carvalho, N. K. Bernardes, and F. de Melo, Phys. Rev. A **96**, 032113 (2017)



スピンの大きさによって
系の大きさを表せるもの

本研究

- **量子スピン系における粗視化測定の例**
- **古典化の検証**

概要：粗視化測定を用いた古典化

量子系

系を大きくする

古典化

研究目的

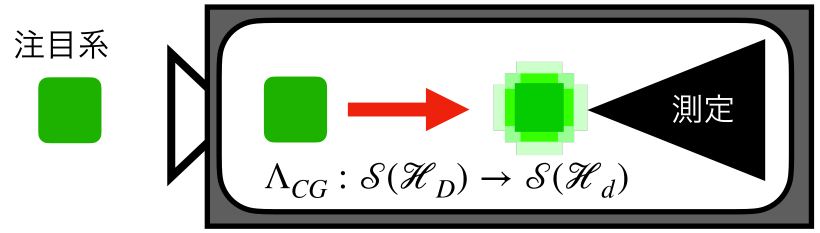
先行研究：測定時の情報の欠如

① いくつかの固有値を同じ値として返す物理量 → **粗視化測定**

J. Kofler and Č. Brukner, Phys. Rev. Lett. **99**, 180403 (2007)

② 状態空間の次元を削減するような量子チャネル → **粗視化操作**

C. Duarte, G. D. Carvalho, N. K. Bernardes, and F. de Melo, Phys. Rev. A **96**, 032113 (2017)



スピンの大きさによって
系の大きさを表せるもの

本研究

・量子スピン系における粗視化測定の例

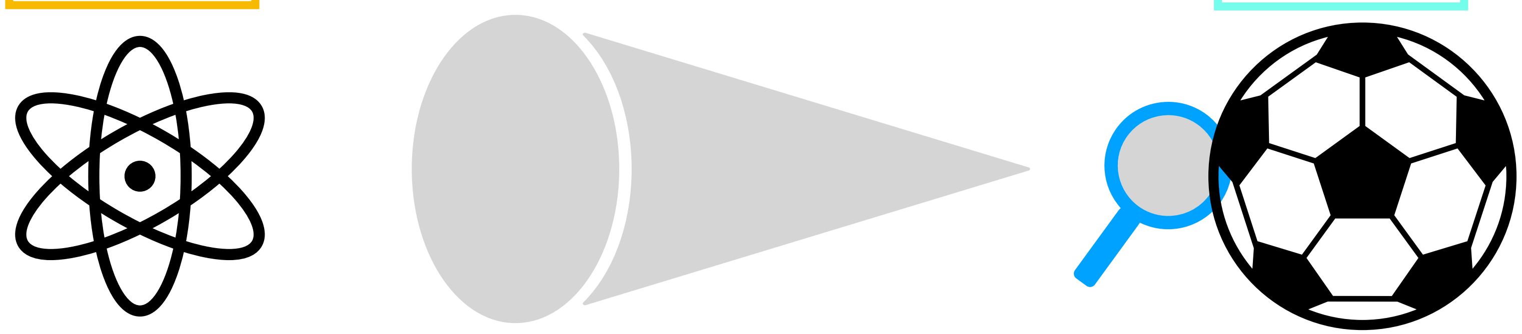
・古典化の検証

背景：量子論と古典論

■ 量子論 vs 古典論

量子論 **古典論**

ミクロ



マクロ

ヒルベルト空間
シュレディンガー方程式
離散値
重ね合わせ状態 etc.

相空間
ニュートンの運動方程式
連続値
決定的な状態 etc.

原理的に、量子論の適用範囲は系の大きさに依らない

→ 量子論によって巨視的な系の記述が可能

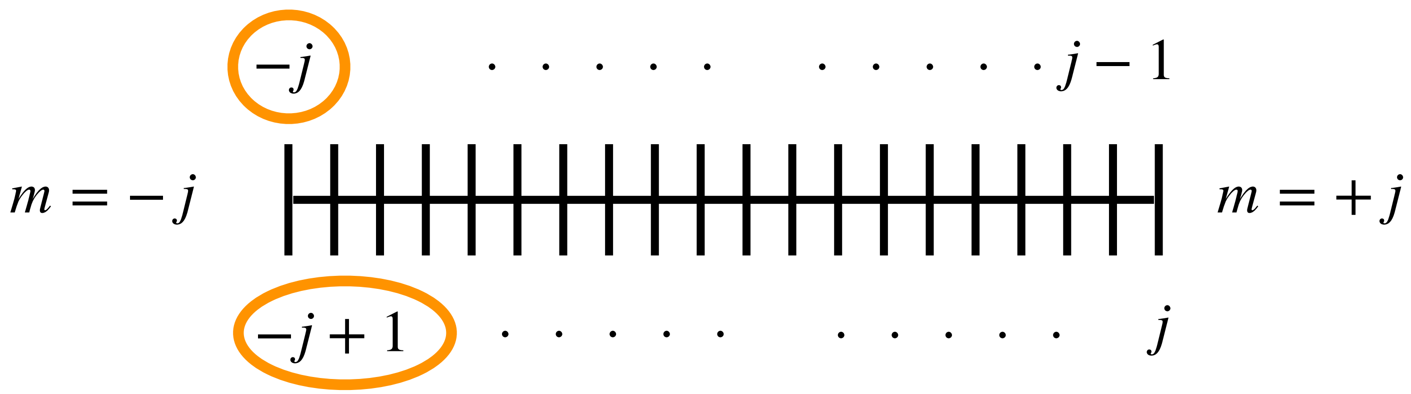
どのような条件でどのようにして量子性が消滅し古典化するのか？

物理量に制限：粗視化測定の理論

粗視化測定

■ 物理量に制限を与えることで量子性が消滅

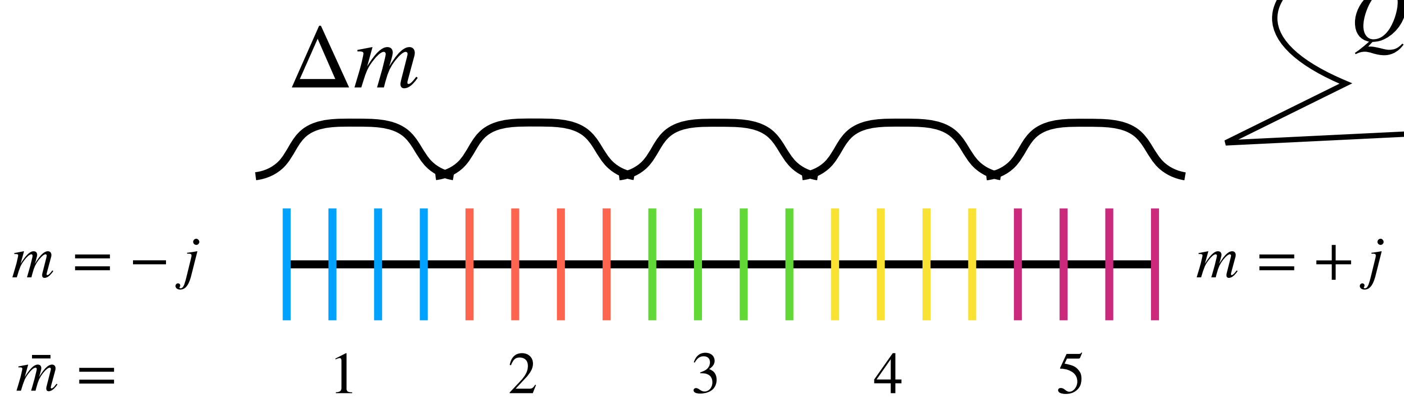
$$\hat{J}_z \; j,m\rangle = m \; j,m\rangle$$



量子性の検知

粗視化測定

$$\hat{Q}_{\bar{m}} = \sum_{m\in\{\bar{m}\}} m\rangle\langle m$$

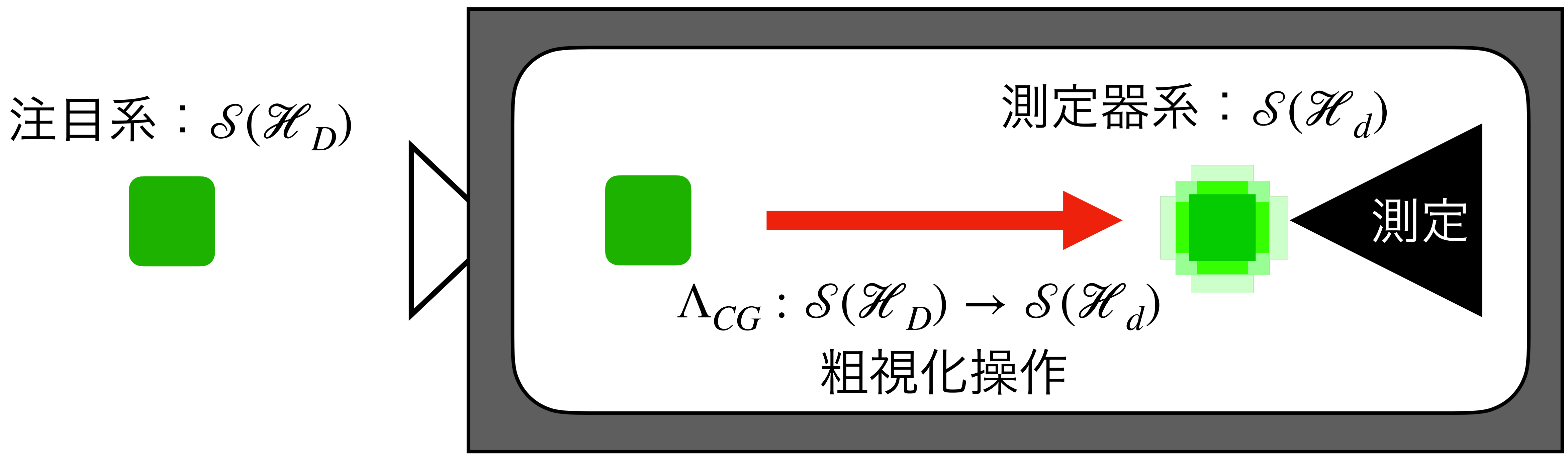


量子性の消失
＝古典化

J. Kofler and Č. Brukner, Phys. Rev. Lett. **99**, 180403 (2007)

粗視化測定

■ 測定器系のヒルベルト空間の次元が低い場合の測定



Schrödinger picture

Definition [粗視化操作]

状態空間の次元を削減する CPTP map:

$$\Lambda_{CG} : \mathcal{S}(\mathcal{H}_D) \to \mathcal{S}(\mathcal{H}_d) \quad \text{with} \quad D > d$$

C. Duarte, G. D. Carvalho, N. K. Bernardes, and F. de Melo, Phys. Rev. A **96**, 032113 (2017)

▼

量子スピン系の場合の具体例を考える

スピン系の粗視化された物理量の集合

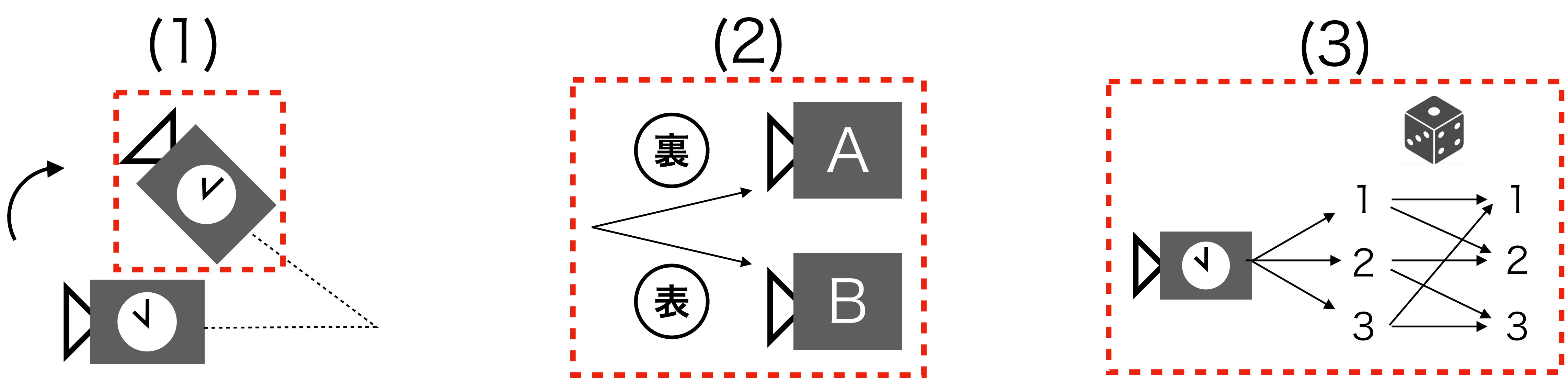
■ スピン系における粗視化された物理量の集合($Cobs$)の条件

Coarse-grained observable

（1）$Cobs$ は回転不変な集合

（2）$Cobs$ 確率混合について閉じている

（3）$Cobs$ 結果について確率的事後処理をしても $Cobs$ に含まれる



本研究のスピン系の粗視化測定(まとめ)

■ 量子スピン系 (スピンの大きさ j) における粗視化測定

◇ 量子スピン系の粗視化された系の物理量の集合 $Cobs_j^l$ が満たす条件

Schrödinger picture

Definition [粗視化操作]

系の次元を削減する CPTP map:

$\Lambda_{CG} : \mathcal{S}(\mathscr{H}_D) \to \mathcal{S}(\mathscr{H}_d)$ with $D > d$

＋

$Cobs_j^l$ が満たす条件

（1）回転不変な集合

（2）確率混合について閉じる

（3）結果の確率的事後処理について閉じる

◇ 粗視化された系の物理量 $\theta_j^l(\mathbf{A})$:

Heisenberg picture

$$\mathbf{n} : j\rangle = \sum_m \binom{2j}{j+m}^{\frac{1}{2}} \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{j+m} \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{j-m} e^{-im\phi} \; j, m\rangle$$

$$\theta_j^l(\mathbf{A}) \equiv \frac{2j+1}{4\pi} \int \mathrm{d}\mathbf{n} \langle \mathbf{n} : l \;\; \mathbf{A} \;\; \mathbf{n} : l\rangle \;\; \mathbf{n} : j\rangle\langle \mathbf{n} : j \;\; , \quad \text{with} \quad D = 2j+1 > d = 2l+1$$

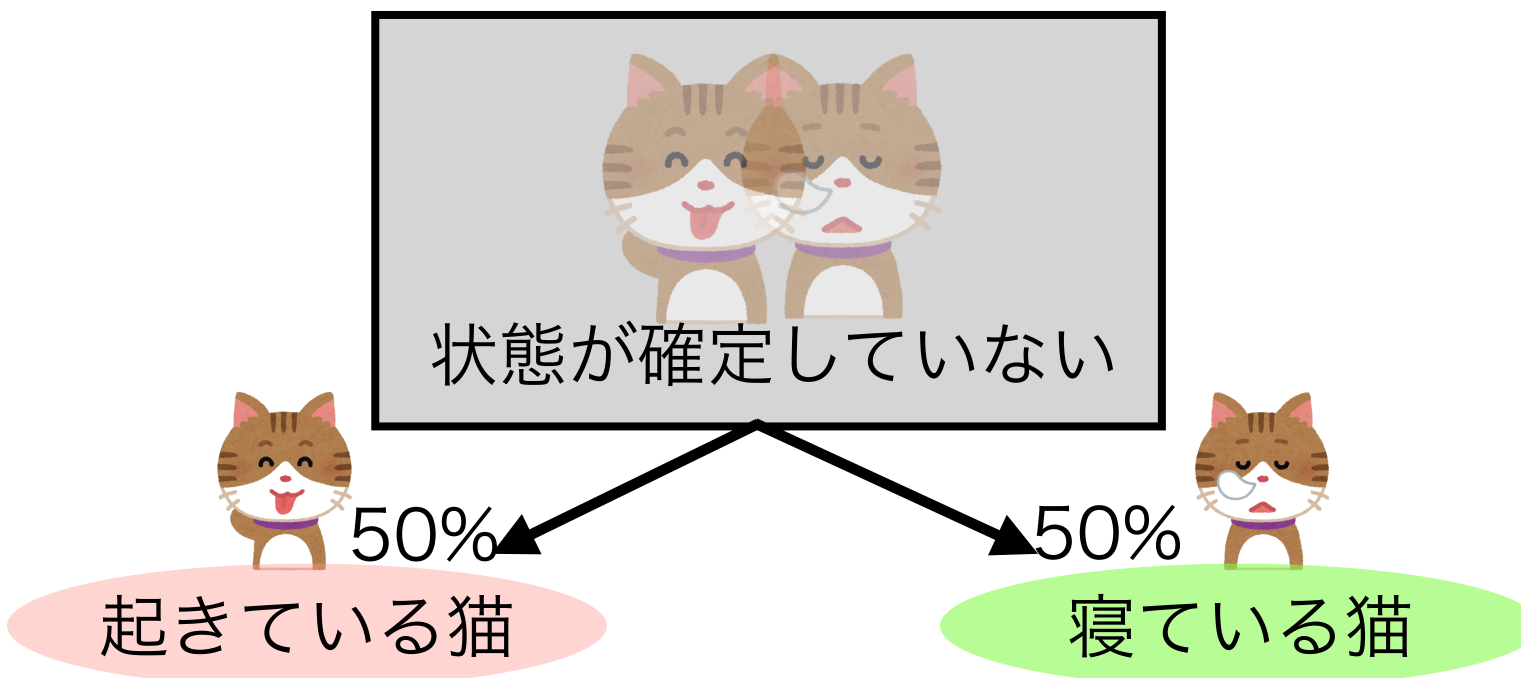
$$\mathbf{A} \in \mathbf{B}(\mathbf{C}^{2l+1})$$

$$Cobs_j^l = \left\{ \theta_j^l(\mathbf{A}) = \left\{ \theta_j\left(A(x)\right) \right\}_x \quad A(x) \in \mathbf{B}(\mathbf{C}^{2l+1}), \quad A(x) \geq 0, \quad \sum_x A(x) = \mathbf{1} \right\}$$

この物理量を使って古典化されるのかの検証

古典化の確認 1：猫状態が観測されるか？

■ 猫状態 ＝ 巨視的に異なる状態の重ね合わせ

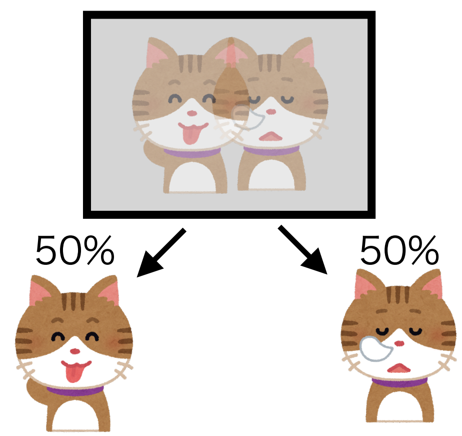


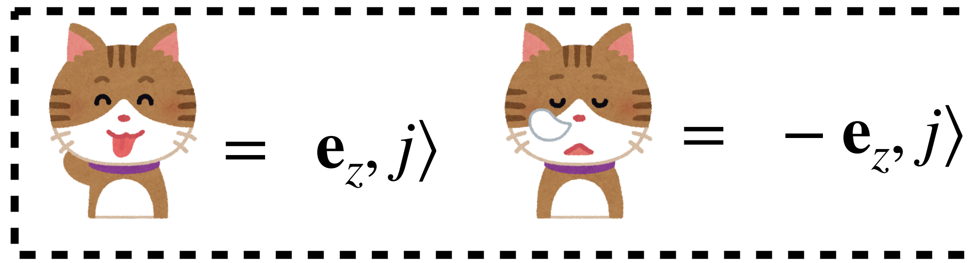
$$\rho_{sup} \equiv \frac{1}{2}\left(\text{起}\rangle + \text{寝}\rangle\right)\left(\langle\text{起} + \langle\text{寝} \right)$$

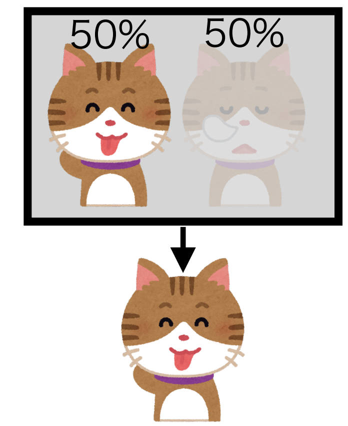
猫状態と確率的混合状態の確率分布が同じかを検証

結果1：猫状態が観測されない

■ 粗視化測定による確率分布の差を確認







猫状態

$$\rho_{sup} \equiv \frac{1}{2}\left(\ \mathbf{e}_z, j\rangle + \ \ -\mathbf{e}_z, j\rangle\right)\left(\langle \mathbf{e}_z, j \ \ + \langle -\mathbf{e}_z, j \ \ \right)$$

確率的混合状態

$$\rho_{mix} \equiv \frac{1}{2}(\ \mathbf{e}_z, j\rangle\langle \mathbf{e}_z, j \ \ + \ \ -\mathbf{e}_z, j\rangle\langle -\mathbf{e}_z, j \ \ )$$

状態 ρ_{sup} で物理量 $\theta_j(\mathbf{A})$ を測定した時に

測定値 x が得られる確率

▼

$$\mathrm{tr}[\rho_{sup}\ \theta_j^l(A(x))] - \mathrm{tr}[\rho_{mix}\ \theta_j^l(A(x))] \ \le (2j+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{2j}$$

j が十分に大きい場合：[猫状態] ≈ [確率的混合状態]

古典化の確認 2：同時測定可能性

■ 同時測定可能な測定器の存在

Definition [同時測定可能]

n 個の物理量の集合 $\{\mathbf{A}_i\} = \{A_i(x)\}_{x,i}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ は，ある物理量 $\mathbf{E} = \{E(y)\}_y$ と条件付き確率分布 $Prob_i(x|y)$ によって各要素 $A_i(x)$ が

$$A_i(x) = \sum_y Prob_i(x|y) E(y)$$

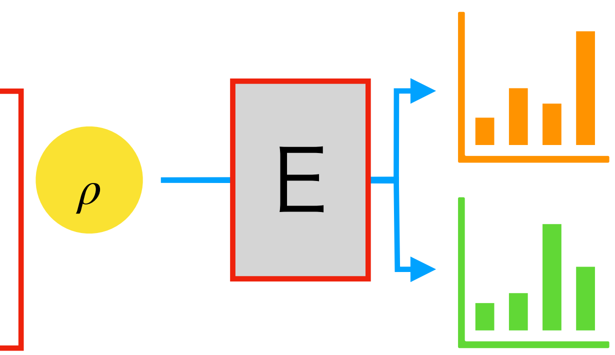
と書けるとき，同時測定可能であるという．

古典の物理量 $\rightleftarrows$ 同時測定可能

結果２：同時測定可能

■ $Cobs$の任意の二つの物理量は同時測定可能

$$\text{測定器：} E(\mathrm{d}\mathbf{n}) = \frac{2j+1}{4\pi}\mathrm{d}\mathbf{n}\ \ \mathbf{n}:j\rangle\langle\mathbf{n}:j$$



物理量$\theta_j(A(x))$の測定：

$$\theta_j^l(A(x)) = \frac{2j+1}{4\pi}\int \mathrm{d}\mathbf{n}\langle\mathbf{n}:l\ \ A(x)\ \ \mathbf{n}:l\rangle\ \ \mathbf{n}:j\rangle\langle\mathbf{n}:j\ \ = \boxed{\int E(\mathrm{d}\mathbf{n})p_{\mathsf{A}}(x\ \ \mathbf{n})}$$

物理量$\theta_j(B(y))$の測定：

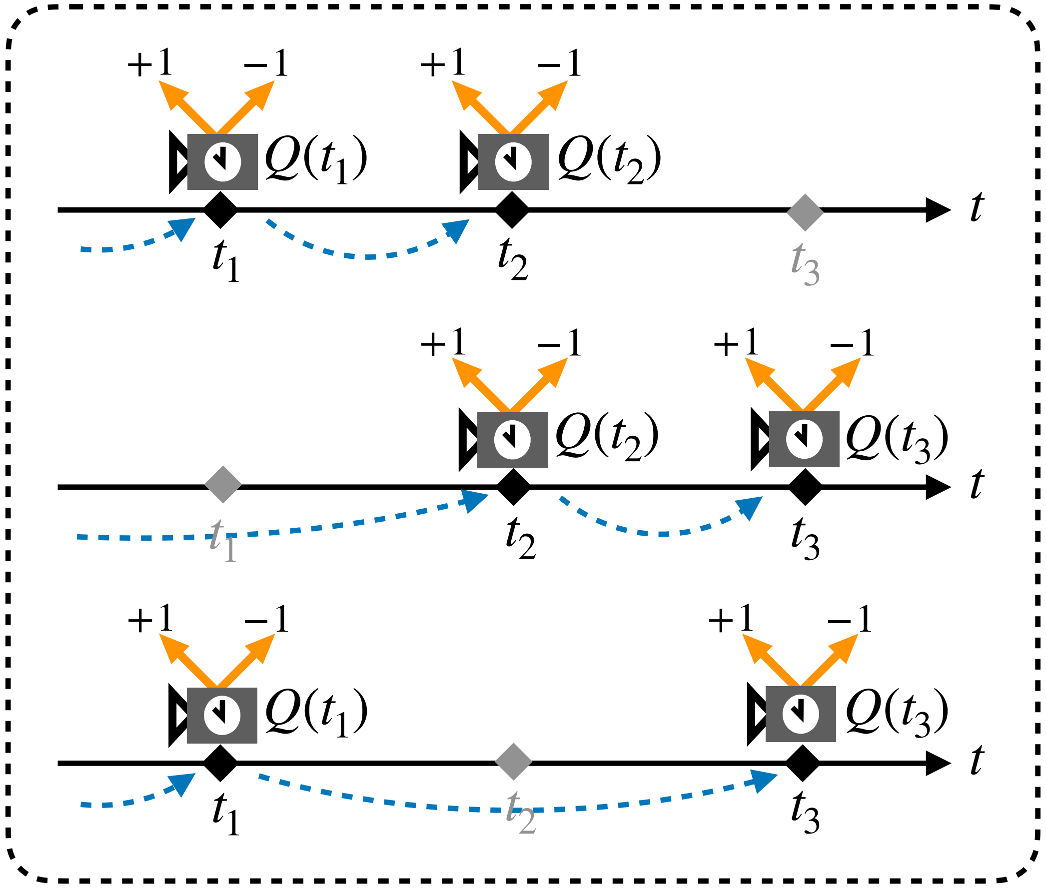
$$\theta_j^l(B(y)) = \frac{2j+1}{4\pi}\int \mathrm{d}\mathbf{n}\langle\mathbf{n}:l\ \ B(y)\ \ \mathbf{n}:l\rangle\ \ \mathbf{n}:j\rangle\langle\mathbf{n}:j\ \ = \boxed{\int E(\mathrm{d}\mathbf{n})p_{\mathsf{B}}(y\ \ \mathbf{n})}$$

※ $p_{\mathsf{A}}(x\ \ \mathbf{n}) = \langle\mathbf{n}:l\ \ A(x)\ \ \mathbf{n}:l\rangle\ \ p_{\mathsf{B}}(y\ \ \mathbf{n}) = \langle\mathbf{n}:l\ \ B(y)\ \ \mathbf{n}:l\rangle$：古典的な事後処理

古典化の確認 3：Leggett-Garg 不等式

■ 測定に関する古典的過程を満たすかどうかの判定式

<u>測定過程</u>



+

<u>Macrorealism：古典的仮定</u>

（A1）*Macrorealism per se*：

測定する前から測定値は決まっている

（A2）*Noninvasive measurability*：

測定は状態に影響を及ぼさない

時間相関関数：$C_{ij} \equiv \langle Q(t_i)Q(t_j) \rangle$

<u>Leggett-Garg 不等式</u>

$$K \equiv C_{12} + C_{23} - C_{13} \leq 1$$

A. J. Leggett and A. Garg, Phys. Rev. Lett. **54,** 857 (1985)

結果 3-① LGI : 歳差運動

■ 歳差運動の場合、粗視化測定を用いると LGI を満たす

◇ ハミルトニアン : $\hat{H} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{J}$ ← $\mathbf{q}$ 軸周りの回転

◇ 2値測定 : $\bar{\mathrm{A}} = \sum xA(x) = A(+1) - A(-1)$

±1を返す任意の2値測定

Leggett-Garg 不等式

$K \equiv C_{12} + C_{23} - C_{13} \leq 1$

粗視化あり

◇ 時間相関関数 : $C_{12} := \dfrac{2j+1}{4\pi} \displaystyle\int \mathrm{d}\mathbf{n} \langle \mathbf{n} : j \;\; \rho \;\; \mathbf{n} : j \rangle \langle R_{t_2}\mathbf{n} : l \;\; \bar{\mathrm{A}} \;\; R_{t_2}\mathbf{n} : l \rangle \langle R_{t_1}\mathbf{n} : l \;\; \bar{\mathrm{A}} \;\; R_{t_1}\mathbf{n} : l \rangle$

$$K = \int \mathrm{d}\mathbf{n} \;\, Q_\rho(\mathbf{n}) \big(f_{\mathrm{A}}(\mathbf{n}, t_1) f_{\mathrm{A}}(\mathbf{n}, t_2) + f_{\mathrm{A}}(\mathbf{n}, t_2) f_{\mathrm{A}}(\mathbf{n}, t_3) - f_{\mathrm{A}}(\mathbf{n}, t_1) f_{\mathrm{A}}(\mathbf{n}, t_3) \big) \;\; \leq 1$$

$Q_\rho(\mathbf{n}) = \dfrac{2j+1}{4\pi} \langle \mathbf{n} : j \;\; \rho \;\; \mathbf{n} : j \rangle$ ←確率分布 $\qquad f_{\mathrm{A}}(\mathbf{n}, t) \;\; = \;\; \langle R_t \mathbf{n} : l \;\; \bar{\mathrm{A}} \;\; R_t \mathbf{n} : l \rangle \;\; \leq 1$

特殊なハミルトニアンでは任意の2値測定で解析的に LGI を満たす

他の複雑なハミルトニアンの場合の LGI はどうなるか？

→ 量子 kicked top

量子 kicked top

■ 古典近似の運動でカオス性をもつ

◇ ハミルトニアン：

$$\hat{H} = \underbrace{p\hat{J}_y}_{\text{歳差運動}} + \underbrace{\left(\frac{k}{2j}\right)\hat{J}_z^{\,2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n)}_{\text{kick}}$$

◇ 時間発展演算子：

$$\hat{U} = \exp\left[\left(-i\frac{k}{2j}\right)\hat{J}_z^{\,2}\right]\exp\left[-ip\hat{J}_y\right]$$

◇ 角運動量演算子の時間発展：

$$\hat{J}^{(n)}_{i=x,y,z} = \left(\hat{U}^n\right)^{\dagger}\hat{J}_{i=x,y,z}\,\hat{U}^n$$

◉ 古典近似による (θ, ϕ) 空間の図：

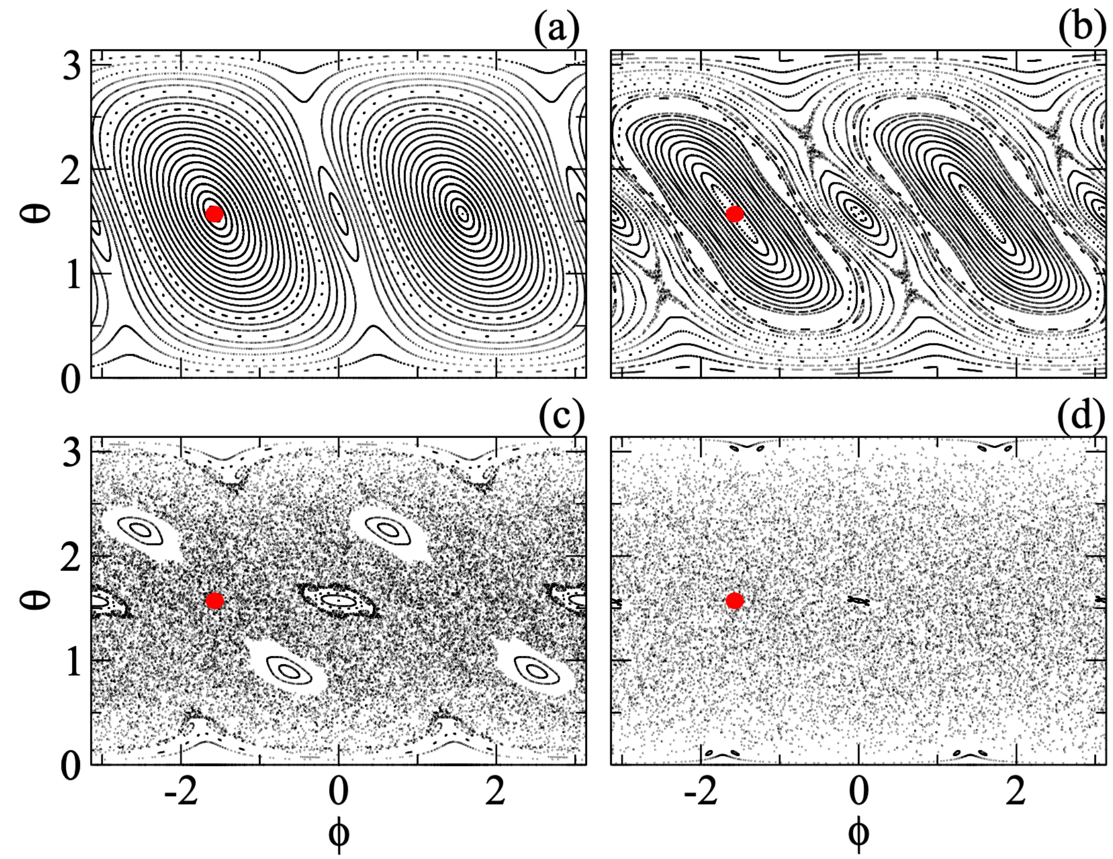


FIG. 1. Phase-space pictures of the classical kicked top for $p = \pi/2$ and (a) $k = 1$, (b) $k = 2$, (c) $k = 3$, and (d) $k = 6$. Filled red circles indicatethe initial position of the spin-coherent state.

Udaysinh T. Bhosale and M.S. Santhanam, Phys. Rev. E **95**, 012216 (2017)

F. Haake, M. Kuś, and R. Sharf, Z. Phys. B: Condens. Matter **65**, 381 (1987)

設定

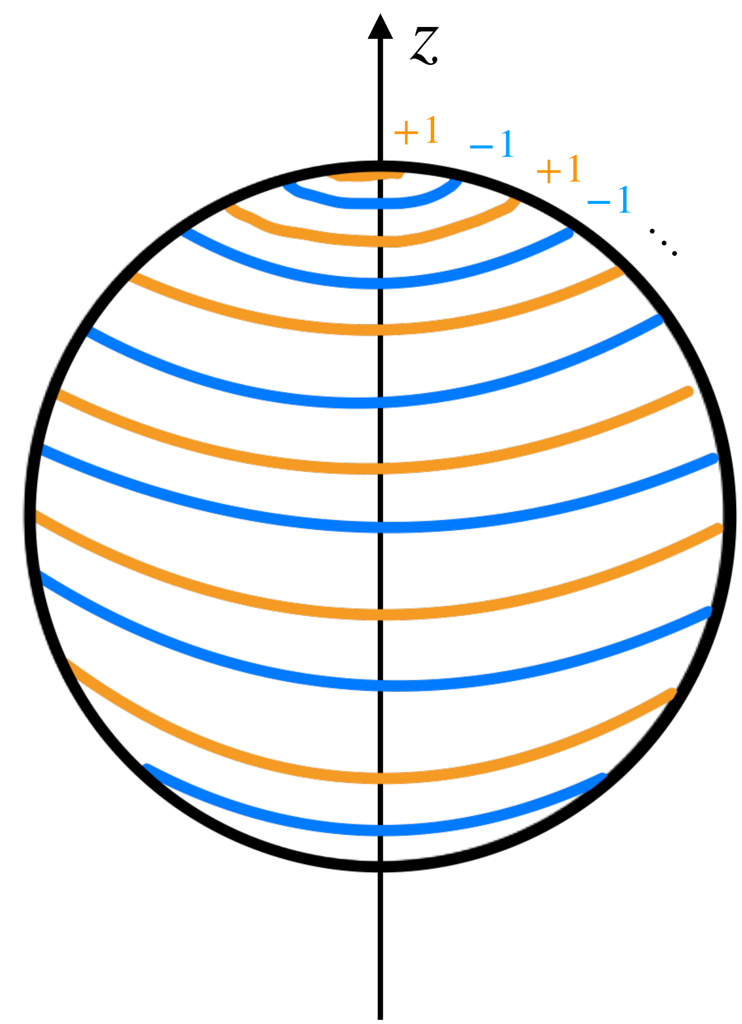
■ 量子 kicked top の時間発展での LGI を数値計算

◇ ハミルトニアン： $\hat{H} = p\hat{J}_y + \left(\frac{k}{2j}\right)\hat{J}_z^{\,2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n)$

◇ 時間発展演算子： $\hat{U} = \exp\left[\left(-i\frac{k}{2j}\right)\hat{J}_z^{\,2}\right]\exp\left[-ip\hat{J}_y\right]$

◇ 初期状態： $\hat{\rho}(0) = \frac{1}{2j+1}\sum_{m=-j}^{j} j,m\rangle\langle j,m \;= \frac{\mathbf{1}}{2j+1}$

◇ 2値測定： $\hat{Q} = \sum_{m=-l}^{l}(-1)^{l-m}\; l,m\rangle\langle l,m$

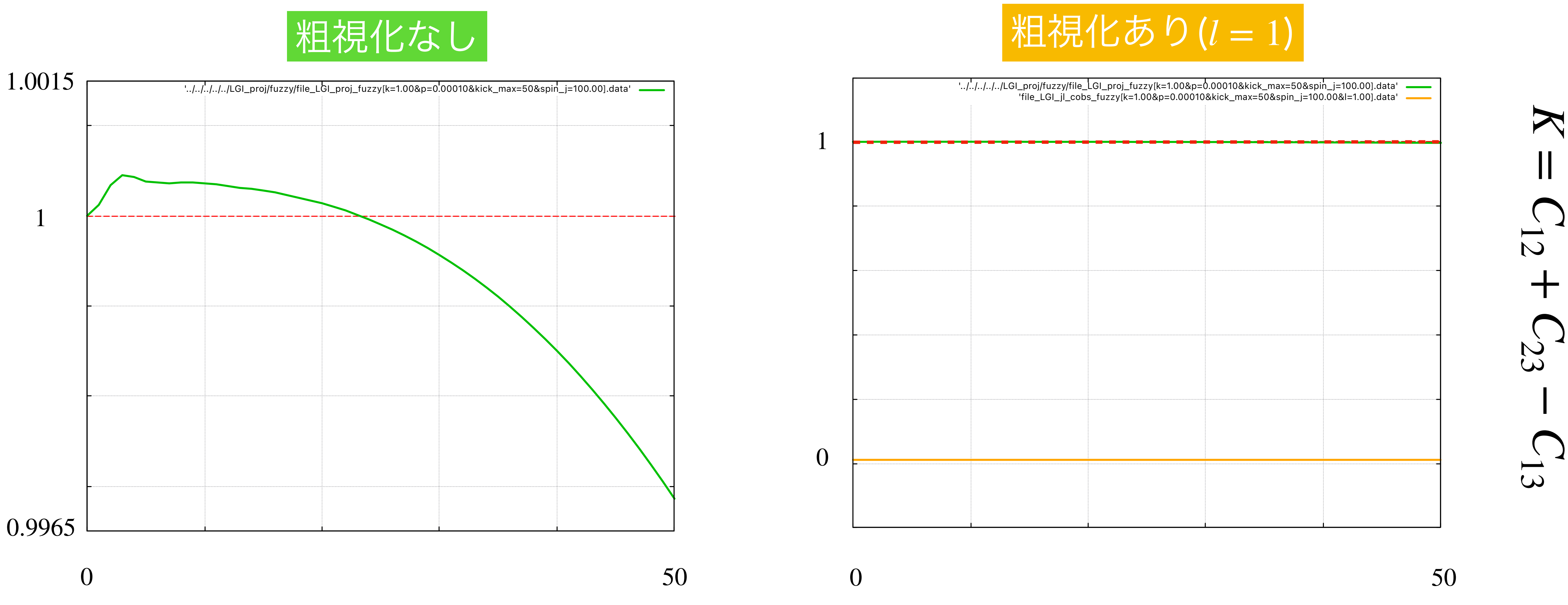


『粗視化なし』と『粗視化あり』で
LGI を数値計算した結果を比較する

結果3-② LGI：量子 kicked top

■ 粗視化測定を用いると LGI を満たす

◉ スピン $j = 100$, 歳差運動の角振動数 $p = 0.0001$, kickの強さ $\boxed{k = 1}$



Δn_{12}

K：LGI 不等式で使われる時間相関関数の足し引き

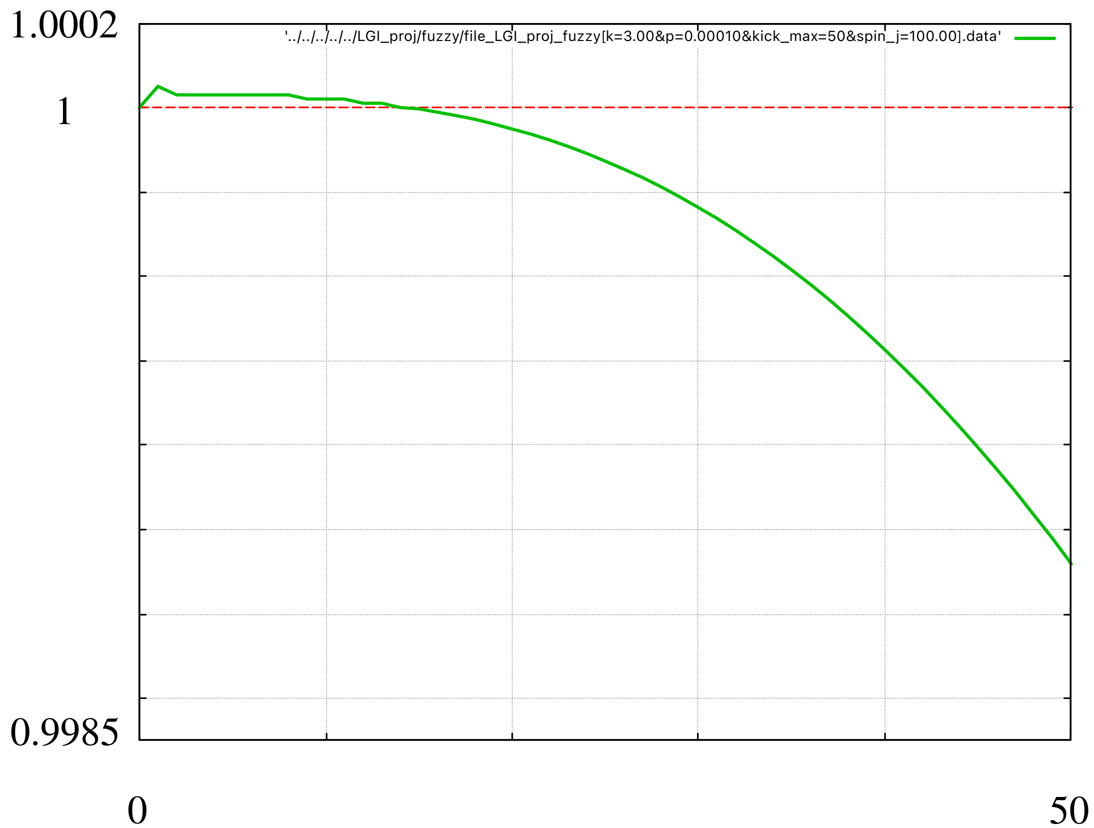
Δn_{12}：隣り合う測定間でのキックの回数（$\Delta n_{13} = 2\Delta n_{12}$）

結果3-② LGI：量子 kicked top

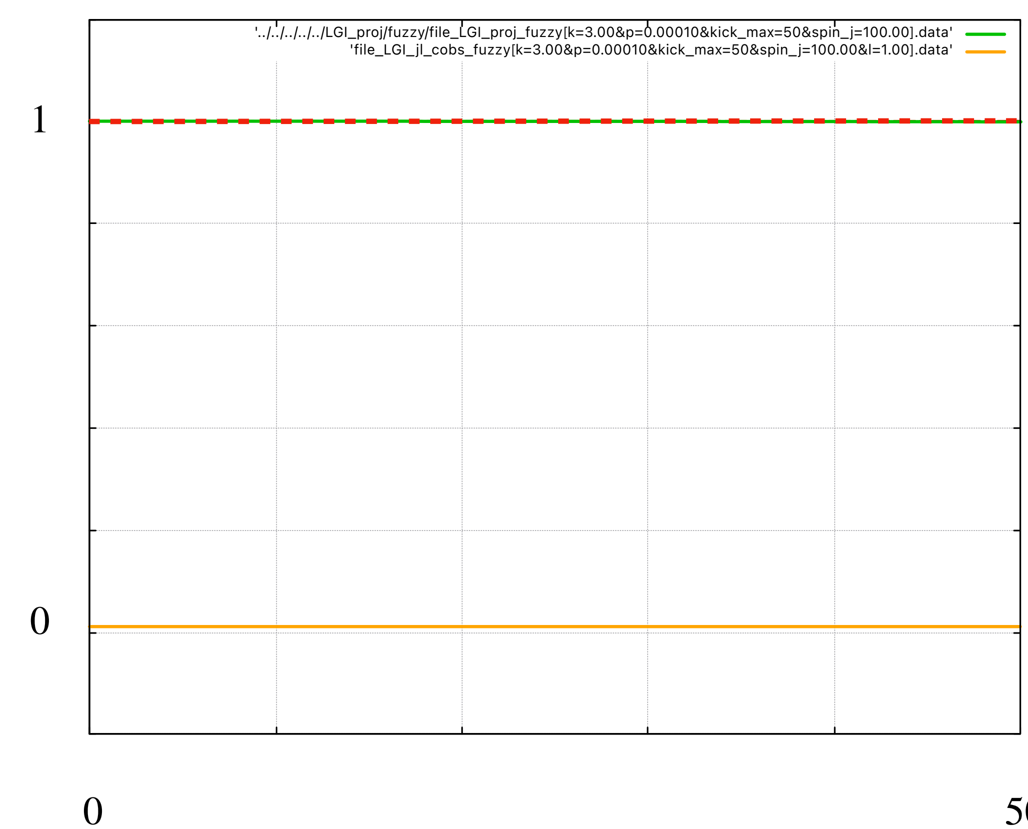
■ 粗視化測定を用いると LGI を満たす

◉ スピン $j = 100$, 歳差運動の角振動数 $p = 0.0001$, kickの強さ $\boxed{k = 3}$

粗視化なし



粗視化あり ($l = 1$)



$K = C_{12} + C_{23} - C_{13}$

Δn_{12}

K：LGI 不等式で使われる時間相関関数の足し引き

Δn_{12}：隣り合う測定間でのキックの回数（$\Delta n_{13} = 2\Delta n_{12}$）

粗視化測定により LGI を満たす → 量子性の消滅

まとめ

○ 先行研究の粗視化測定の広い定義から、量子スピン系における粗視化測定の非自明な例を１つ構築

Schrödinger picture

Definition [粗視化操作]

系の次元を削減する CPTP map:

$\Lambda_{CG} : \mathcal{S}(\mathcal{H}_D) \to \mathcal{S}(\mathcal{H}_d)$ with $D > d$

＋

（1）回転不変な集合

（2）確率混合について閉じる

（3）結果の確率的事後処理について閉じる

$Cobs_j^l$ が満たす条件

▼

Heisenberg picture

$$\theta_j^l(\mathbf{A}) \equiv \frac{2j+1}{4\pi}\int \mathrm{d}\mathbf{n}\langle \mathbf{n} : l \ \ \mathbf{A} \ \ \mathbf{n} : l\rangle \ \ \mathbf{n} : j\rangle\langle \mathbf{n} : j \ \ ,$$

with $D = 2j+1 > d = 2l+1$, $\mathbf{A} \in \mathbf{B}(\mathbf{C}^{2l+1})$

$$Cobs_j^l = \left\{ \theta_j^l(\mathbf{A}) = \left\{\theta_j\left(A(x)\right)\right\}_x \quad A(x) \in \mathbf{B}(\mathbf{C}^{2l+1}), \quad A(x) \geq 0, \quad \sum_x A(x) = \mathbf{1} \right\}$$

○粗視化測定の例を用いて以下の古典化を示した

1. Cat state が観測できないこと
2. 同時測定可能であること
3. LGI を満たすようになること