操作的確率論の立場から見た古典と量子の関係：量子化/古典極限をめぐって

このファイルは以下の場所からダウンロードできます。

https://www.agu.ac.jp/~yamasita/yama.pdf

山下秀康（愛知学院大学教養部）

March 12, 2024

量子化の理論

古典と量子の関係を論じたい。その中でも私が扱いたいのは

- (古典 $\Rightarrow$ 量子) 量子化の理論
- (量子 $\Rightarrow$ 古典) 古典極限の理論 (半古典近似理論の一部を含む)

だが，今日は前者だけ触れる。

量子化の理論

古典と量子の関係を論じたい。その中でも私が扱いたいのは

- (古典 $\Rightarrow$ 量子) 量子化の理論
- (量子 $\Rightarrow$ 古典) 古典極限の理論 (半古典近似理論の一部を含む)

だが，今日は前者だけ触れる。

量子化の厳密な理論としてよく知られている手法には次のものがある。

- 幾何学的量子化 (by Kostant, Kirillov, Souriou, etc)
- 変形量子化 (by Bayen–Flato–Fronsdal–Lichnerowicz–Sternheimer (1978) [BFF+78a, BFF+78b], etc)
- 経路積分量子化 (e.g. Feynman–Kac 公式に基づくもの)

量子化の理論

古典と量子の関係を論じたい。その中でも私が扱いたいのは

- (古典 $\Rightarrow$ 量子) 量子化の理論
- (量子 $\Rightarrow$ 古典) 古典極限の理論 (半古典近似理論の一部を含む)

だが，今日は前者だけ触れる。

量子化の厳密な理論としてよく知られている手法には次のものがある。

- 幾何学的量子化 (by Kostant, Kirillov, Souriou, etc)
- 変形量子化 (by Bayen–Flato–Fronsdal–Lichnerowicz–Sternheimer (1978) [BFF$^+$78a, BFF$^+$78b], etc)
- 経路積分量子化 (e.g. Feynman–Kac 公式に基づくもの)

だが，そもそも量子化とは何か？ その概念的基礎は未だに明瞭でないように見える:

- 「量子化」の明確な定義がない; and/or
- 「量子化」の定義が一貫せず， case-by-case である; and/or
- 「量子化」の定義が形式的であり，物理的／操作的／確率的意味が不明瞭である（とくに変形量子化において）

OPT (Operational Probability Theory)

他方，一般確率論 (GPT) や操作的確率論 (OPT) は，歴史は古いものの (e.g. Mackey 1950's)，近年になってから非常に盛んに研究されるようになった。それは，おおまかに言えば，古典と量子の両方を含む一般的・普遍的な確率論的構造の把握を目指すものである。よって古典-量子関係を論ずる量子化/古典極限の理論の概念的基礎に GPT や OPT を置くのは自然な発想であると思われる。しかし，その発想に基づく研究はなぜか極めて少ないようである。

OPT (Operational Probability Theory)

他方，一般確率論 (GPT) や操作的確率論 (OPT) は，歴史は古いものの (e.g. Mackey 1950's)，近年になってから非常に盛んに研究されるようになった。それは，おおまかに言えば，古典と量子の両方を含む一般的・普遍的な確率論的構造の把握を目指すものである。よって古典-量子関係を論ずる量子化/古典極限の理論の概念的基礎に GPT や OPT を置くのは自然な発想であると思われる。しかし，その発想に基づく研究はなぜか極めて少ないようである。

- ただし，近年の GPT/OPT 文献があまりに膨大な上，私がそちらの専門家ではないため，私が知らない既成研究が多く存在する可能性がある。今回の集会に多く参加されると思われる GPT/OPT の専門家の方々のご教示をいただきたいところである。

OPT (Operational Probability Theory)

他方，一般確率論 (GPT) や操作的確率論 (OPT) は，歴史は古いものの (e.g. Mackey 1950's)，近年になってから非常に盛んに研究されるようになった。それは，おおまかに言えば，古典と量子の両方を含む一般的・普遍的な確率論的構造の把握を目指すものである。よって古典-量子関係を論ずる量子化/古典極限の理論の概念的基礎に GPT や OPT を置くのは自然な発想であると思われる。しかし，その発想に基づく研究はなぜか極めて少ないようである。

- ただし，近年の GPT/OPT 文献があまりに膨大な上，私がそちらの専門家ではないため，私が知らない既成研究が多く存在する可能性がある。今回の集会に多く参加されると思われる GPT/OPT の専門家の方々のご教示をいただきたいところである。

今回の発表は OPT を基礎として量子化/古典極限の理論を基礎づけようとする試みの出発点である。

ただし，ここで私が使う "OPT" は，最近流行の形式とは (表面的な) 趣が違うという意味でかなり特殊である。

「すべての操作」を考えるのではなく，非常に限定された操作だけの集合を考える。その結果として例えば凸性が成り立たなくなる。(普通の GPT/OPT では成り立つ性質。)

量子化の難しさ

有限自由度の古典力学的相空間は一般に（有限次元）シンプレクティック多様体で表されるが，その特殊な場合として **Kähler 多様体**がある。

- コンパクト Kähler 多様体の量子化については (上記 3 種のいずれの量子化についても) 最近 20 年間のうちに比較的解明されている。コンパクト Kähler 多様体を量子化した量子状態空間 (Hilbert 空間) は有限次元になるから，数学的に比較的易しいのは分かる。しかし，それでも完全解明とまでは言えず，コンパクト Kähler 多様体の最も簡単な例である 2 次元球面 S^2 の場合ですら未解決問題が残っている。

量子化の難しさ

有限自由度の古典力学的相空間は一般に（有限次元）シンプレクティック多様体で表されるが，その特殊な場合として **Kähler 多様体**がある。

- コンパクト Kähler 多様体の量子化については (上記 3 種のいずれの量子化についても) 最近 20 年間のうちに比較的解明されている。コンパクト Kähler 多様体を量子化した量子状態空間 (Hilbert 空間) は有限次元になるから，数学的に比較的易しいのは分かる。しかし，それでも完全解明とまでは言えず，コンパクト Kähler 多様体の最も簡単な例である 2 次元球面 S^2 の場合ですら未解決問題が残っている。

- コンパクトでない（有限次元）多様体の量子化は，Hil.sp. の無限次元化に伴う諸々の困難のため未解明部分が多い。
- さらに，場の理論等の無限自由度系に対応する無限次元多様体となると，その量子化の一般論は現状では事実上不可能で，いくつかの特殊な具体的モデルを個別に扱う他ないと思われる。
- もちろん，現実の物理的問題に現れる相空間のほとんどが非コンパクトである。いかに未解明部分が多いかということである。

目標

- 中長期目標：上記 3 種の量子化 (できればそれに加えて古典極限) に共通する概念的基礎を OPT で定式化する。
- 短期目標 1：コンパクト Kähler 多様体の量子化を OPT 上で定式化する。（(時間があれば) ほんの少し後述する）
- 短期目標 2： Sorkin は量子力学の基礎づけに関する論考 [Sor94] において「量子測度論」(quantum measure theory) というアイデアを提唱した。これはそれなりに影響力のある発想ではあった (e.g. [BMU14, Mül21]) が，このアイデアは未だ理論的に (数学的にも概念的にも) 形が整っていない。 OPT の観点からこれを理論的に整備する。（一部，後述する）

この短期目標 2 が中長期目標とどう関係するのかを詳述する時間はないが，この短期目標 2 はどちらかと言えば経路積分量子化の基礎づけに関わると予想される。

古典と量子に共通する性質

- **orthomodular 束** (OM 束) の構造（しばしば量子論理と呼ばれる）

Hil. sp. $\mathcal{H}$ 上の射影全体，より一般に，von Neumann 代数の射影全体は OM 束となる。

他方，古典系の事象系の構造を表すと考えられるのがブール代数である。大雑把に言えば，ブール代数の構造から分配則
$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \vee c)$ の要請を外した代数構造が OM 束である。
（より正確に言うと，OM 束が $a = (a \wedge b) \vee (a \wedge b')$ を満たせばブール代数になる。）

ブール代数も OM 束の一種であるから，OM 束は古典と量子に共通の構造と言える。

古典と量子に共通する性質

- **orthomodular 束** (OM 束) の構造（しばしば**量子論理**と呼ばれる）

Hil. sp. $\mathcal{H}$ 上の射影全体，より一般に，von Neumann 代数の射影全体は OM 束となる。

他方，古典系の事象系の構造を表すと考えられるのが**ブール代数**である。大雑把に言えば，ブール代数の構造から分配則 $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \vee c)$ の要請を外した代数構造が OM 束である。
(より正確に言うと，OM 束が $a = (a \wedge b) \vee (a \wedge b')$ を満たせばブール代数になる。)

ブール代数も OM 束の一種であるから，OM 束は古典と量子に共通の構造と言える。

$$\text{量子化:} \quad \text{古典系} \Rightarrow \text{量子系}$$

という図式を

$$\text{量子化:} \quad \text{ブール代数} \Rightarrow \text{OM 束}$$

と捉えるのは一つの観点ではある。しかし，上の図式だけでは情報不足で大雑把すぎる。実際，ブール代数はもとから OM 束なのだから，これだけでは論理的に何も言っていないに等しい。

ブール代数 ⇒OM 束：具体的な手続き（の候補）

実際のところ，以下の話で OM 束はそれほど中心的な話題にはならないのだが，話の流れ上，「ブール代数 ⇒ OM 束」という図式を維持することとする。

$\mathcal{B}$ をブール代数とする。$\mathcal{B}$ の各元を射影的測定操作と解釈すると，$a, b \in \mathcal{B}$ の操作としての合成は $ab := a \wedge b$ に他ならない。この積のもとで $\mathcal{B}$ は可換半群となる。さらに，$\mathcal{B}$ のすべての元が $a^* = a$ をみたすと仮定すれば，これは可換な $*$ 半群となる。（$*$ 半群とは，半群に $(ab)^* = b^* a^*$, $a^{**} = a$ という規則が加わったもの。）

ブール代数 ⇒OM 束：具体的な手続き（の候補）

実際のところ，以下の話で OM 束はそれほど中心的な話題にはならないのだが，話の流れ上，「ブール代数 ⇒ OM 束」という図式を維持することとする。

$\mathcal{B}$ をブール代数とする。$\mathcal{B}$ の各元を射影的測定操作と解釈すると，$a, b \in \mathcal{B}$ の操作としての合成は $ab := a \wedge b$ に他ならない。この積のもとで $\mathcal{B}$ は可換半群となる。さらに，$\mathcal{B}$ のすべての元が $a^* = a$ をみたすと仮定すれば，これは可換な $*$ 半群となる。（$*$ 半群とは，半群に $(ab)^* = b^* a^*$, $a^{**} = a$ という規則が加わったもの。）

次に $\mathcal{B}$ を非可換化する。$\mathcal{B}$ に 1 個の新たな射影元 ε （単なる形式的記号と考える）とその補元 ε' を追加し，$\mathcal{B} \cup \{\varepsilon, \varepsilon'\}$ から「自由に」生成される非可換半群 $\mathcal{G} = \mathcal{G}[\mathcal{B}, \varepsilon, \varepsilon']$ を考える。つまり $\mathcal{B} \cup \{\varepsilon, \varepsilon'\}$ の元の形式的な積全体から生成される非可換半群（自由半群）に，$\mathcal{B}$ の演算規則と

$$\varepsilon^2 = \varepsilon^* = \varepsilon, \quad \varepsilon'^2 = \varepsilon'^* = \varepsilon', \quad \varepsilon\varepsilon' = \varepsilon'\varepsilon = 0$$

を入れたものが $\mathcal{G}$ である。$\mathcal{G}$ の射影元 ($x^2 = x^* = x$ なるもの) 全体 $\mathcal{P}(\mathcal{G})$ は OM 束となる。（この辺り以降，Foulis [Fou60] によって創始された **Foulis 半群** (Baer *半群) の理論を援用する。）

この $\mathcal{G}$ を，$\mathcal{B}$ の**前量子化 Foulis 半群**と呼ぶことにする。

なお，$\mathcal{G}$ の操作的解釈はそれなりに考えられるが，まだ議論の余地が多く，話が長くなりそうなので，あえてそこには触れず数学的形式に徹することにする。

この $\mathcal{G}$ を，$\mathcal{B}$ の**前量子化 Foulis 半群**と呼ぶことにする。

なお，$\mathcal{G}$ の操作的解釈はそれなりに考えられるが，まだ議論の余地が多く，話が長くなりそうなので，あえてそこには触れず数学的形式に徹することにする。

$\mathcal{G}$ が「自由に」生成される半群であるということは，そこにまだ非自明な法則（物理法則等）が何も入っていないということである。

物理法則を代数構造の中に組み込んで表現する方針も考えられるが，ここではそうせず，代わりに，物理的に意味のある確率測度 $\mathbb{P}$ を $\mathcal{G}$ 上に与えることによって物理法則を表現することを考える。古典系とその量子化 (たち) を同じ１個の代数構造の上で考えたいからである。

この $\mathcal{G}$ を，$\mathcal{B}$ の**前量子化 Foulis 半群**と呼ぶことにする。

なお，$\mathcal{G}$ の操作的解釈はそれなりに考えられるが，まだ議論の余地が多く，話が長くなりそうなので，あえてそこには触れず数学的形式に徹することにする。

$\mathcal{G}$ が「自由に」生成される半群であるということは，そこにまだ非自明な法則（物理法則等）が何も入っていないということである。

物理法則を代数構造の中に組み込んで表現する方針も考えられるが，ここではそうせず，代わりに，物理的に意味のある確率測度 $\mathbb{P}$ を $\mathcal{G}$ 上に与えることによって物理法則を表現することを考える。古典系とその量子化 (たち) を同じ１個の代数構造の上で考えたいからである。

しかし $\mathcal{G}$ 上の確率測度なる概念がまだ定義されていない！

この $\mathcal{G}$ を，$\mathcal{B}$ の**前量子化 Foulis 半群**と呼ぶことにする。

なお，$\mathcal{G}$ の操作的解釈はそれなりに考えられるが，まだ議論の余地が多く，話が長くなりそうなので，あえてそこには触れず数学的形式に徹することにする。

$\mathcal{G}$ が「自由に」生成される半群であるということは，そこにまだ非自明な法則（物理法則等）が何も入っていないということである。

物理法則を代数構造の中に組み込んで表現する方針も考えられるが，ここではそうせず，代わりに，物理的に意味のある確率測度 $\mathbb{P}$ を $\mathcal{G}$ 上に与えることによって物理法則を表現することを考える。古典系とその量子化 (たち) を同じ１個の代数構造の上で考えたいからである。

しかし $\mathcal{G}$ 上の確率測度なる概念がまだ定義されていない！

なお Foulis 半群の定義をまだ書いていなかったので一応書く。

定義 (Foulis 1960 [Fou60], see also e.g. [MM70], [前 80])

0,1 を持つ $*$ 半群 $(G, \cdot, *, 0, 1)$ が，写像 $' : G \to \mathcal{P}(G)$ を与えられ，以下をみたすときに **Foulis 半群** (または **Baer*半群**) という：

$$0' = 1, \qquad 1' = 0, \qquad ab = 0 \iff b = a'b, \quad \forall a, b \in G. \tag{2.1}$$

$\mathcal{G}$ の加法的拡大

次に，古典的な測度論で用いられる σ 加法的集合体の類似物を「操作から成る $*$ 半群」の範疇で構成したい。上に構成した $\mathcal{G}$ 自体はその役目を果たさない (説明省略)。よってその拡大 $\hat{\mathcal{G}}$ を作る。

まず $a, b \in \mathcal{P}(\mathcal{G})$ (射影) のときだけ定義されていた関係 $a \perp b$（古典的測度論での「背反」に相当する関係）を，$\mathcal{G}$ 全体に拡張する。

$\mathcal{G}$ に限らず任意の $*$ 半群 G について， $a, b \in G$ の関係 $a \perp_G b$ (略して $a \perp b$) を $a^*b = ba^* = 0$ で定義してみると，その拡張がうまくいく。（そう定義する理由の説明は省略）

古典的測度論での集合族の有限加法性に相当する条件を $*$ 半群で考えると

$$a, b \in G, \; a \perp_G b \quad \Longrightarrow \quad a \ovee b \in G$$

となるであろう。($a \perp b$ のときに限り $a \vee b$ を $a \ovee b$ と書く。）が，$a \ovee b$ がまだ $\mathcal{P}(\mathcal{G})$ 上でしか定義されていない。これも拡張する。

$\mathcal{G}$ の加法的拡大

一般に，(半) 群 G の元の形式的な有限和 $\sum \lambda_k a_k$ ($\lambda_k \in \mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$) の全体は代数的 **(半)** 群環 $\mathbb{K}[G]$ というものになる。

前量子化 Foulis 半群 $\mathcal{G}$ についても環 $\mathbb{K}[\mathcal{G}]$ を考えるが，この場合はすべての和を形式的なものとするのではなく，$a, b \in \mathcal{P}(\mathcal{G})$, $a \perp b$ のときに限り $a + b := a \varovee b$ とする。

$\mathcal{G} \subset \mathcal{K} \subset \mathbb{K}[\mathcal{G}]$ なる Foulis 半群 $\mathcal{K}$ のうちで，以下の意味での有限加法性を持つ「必要最小限」のものを考える：

$$a, b \in \mathcal{K},\ a \perp b \quad \Longrightarrow \quad a + b \in \mathcal{K}$$

これを $\mathcal{G}$ の有限加法的拡大といい，$\hat{\mathcal{G}}$ で表す。同様に可算加法的拡大も定義されると思われるが，まだその存在証明が完成していない。

$a, b \in \hat{\mathcal{G}}$, $a + b \in \hat{\mathcal{G}}$ のときは $a + b$ を $a \varovee b$ と書く。これは $\mathcal{P}(\mathcal{G})$ 上の関係 $\varovee$ の拡張になっている。

ここで記号 $+$ をわざわざ (部分的に) $\varovee$ に書き換えた理由： $\varovee$ は $+$ とは違って，単なる形式的演算ではなく，操作的または論理的な意味を持つ演算になる（という希望的観測）。議論の余地あり。

$\mathcal{G}$ の加法的拡大

操作的・物理的解釈可能なものだけで話をしようとする私の当初の目標からすると，解釈を無視した形式的な和の集合 $\mathbb{K}[\mathcal{G}]$ を導入した時点で，「私の部分的な負け」である。数学的にあれこれ難儀した結果こうなった。

しかし，それが上記のように再解釈可能であるという希望的観測の下，話を推し進めることにする。

$\mathcal{G}$ の加法的拡大

操作的・物理的解釈可能なものだけで話をしようとする私の当初の目標からすると，解釈を無視した形式的な和の集合 $\mathbb{K}[\mathcal{G}]$ を導入した時点で，「私の部分的な負け」である。数学的にあれこれ難儀した結果こうなった。

しかし，それが上記のように再解釈可能であるという希望的観測の下，話を推し進めることにする。

部分演算 $\ovee$ に関する以上の話は， Foulis & Bennet [FB94] による **effect algebra (EA)** と，それを Gudder, Greechie らが拡張した **sequential effect algebra (SEA)** [GN01, GG02, GN02] の理論に重なる部分が多いように見える。EA, SEA に基づく一種の一般確率論は今も盛んに研究されているので，その分野の成果を私の研究で利用できないかと考えたが，肝心のところで話が噛み合わず，うまくいっていない。
そこで，私は Baer*環 [Ber11] と Foulis 半群 (Baer *半群とも呼ばれる. e.g. [Fou60, MM70]) という古い理論と Cirulis [Cīr14] などの結果を利用しつつ，残りは自分で考えることとなった。なお，皮肉にも Foulis らの (S)EA 理論は， Foulis 半群の理論とはあまり関係ないようである。

有限加法的確率測度

話を確率の加法性に戻す。$\mathbb{P} : \hat{\mathcal{G}} \to [0,1]$ とする。

$$A \overset{\text{fin}}{\subset} \hat{\mathcal{G}},\ \perp A \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{P}\left(\bigvee A\right) = \sum_{a \in A} \mathbb{P}(a) \quad (\overset{\text{fin}}{\subset}\text{: finite subset})$$

のとき，$\mathbb{P}$ は有限加法的であるという。$\mathbb{P}$ がさらに若干の追加要請をみたすとき，$\hat{\mathcal{G}}$ 上の有限加法的確率測度という。

有限加法的確率測度

話を確率の加法性に戻す。$\mathbb{P} : \hat{\mathcal{G}} \to [0,1]$ とする。

$$A \overset{\text{fin}}{\subset} \hat{\mathcal{G}},\ \perp A \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{P}\left(\bigovee A\right) = \sum_{a \in A} \mathbb{P}(a) \quad (\overset{\text{fin}}{\subset}\text{: finite subset})$$

のとき，$\mathbb{P}$ は有限加法的であるという。$\mathbb{P}$ がさらに若干の追加要請をみたすとき，$\hat{\mathcal{G}}$ 上の有限加法的確率測度という。

しかし，これに加えて仮に可算加法的確率測度まで定義できたとしても，それだけでは「量子測度論」の基礎としては足りない！ 以下にそれを説明する。

$A \overset{\text{fin}}{\subset} \hat{\mathcal{G}}$ とする。 $\bigovee A$ が定義されるとき，つまり $\bigovee A := \sum A \in \hat{\mathcal{G}}$ のときに $\overset{\text{c}}{\perp} A$ と書く。明らかに $\perp A \Rightarrow \overset{\text{c}}{\perp} A$ である。

説明の簡明化のための方便として以下のように解釈する：$\overset{\text{c}}{\perp} A$ とは，A の元が「古典的に見ると互いに背反」を意味する。例えば，2 重スリット実験で，1 個の粒子が，スリット 1 を通って検知器に来る経路をとる事象と，スリット 2 を通って検知器に来る経路をとる事象は「古典的には背反（同時成立不可能）」である。

Sorkin 加法性 (Ref. [Sor94, BMU14, Mül21])

上記の確率の加法性は $\perp A$ のときだけ成立する。しかし量子力学において $\perp A$ は古典的な背反 $\overset{\mathrm{c}}{\perp} A$ よりずっと強い条件だから，確率の加法性が成立する機会がずっと少なくなる。よって，確率の加法性は，量子確率論あるいは量子測度論の指導原理としては弱すぎる。

より強力な指導原理の有力候補が Sorkin 加法性である。それは，$\perp A$ ではなくて $\overset{\mathrm{c}}{\perp} A$ を条件とするからはるかに広く成立する。

Sorkin 加法性 (Ref. [Sor94, BMU14, Mül21])

上記の確率の加法性は $\perp A$ のときだけ成立する。しかし量子力学において $\perp A$ は古典的な背反 $\overset{\mathrm{c}}{\perp} A$ よりずっと強い条件だから，確率の加法性が成立する機会がずっと少なくなる。よって，確率の加法性は，量子確率論あるいは量子測度論の指導原理としては弱すぎる。

より強力な指導原理の有力候補が Sorkin 加法性である。それは，$\perp A$ ではなくて $\overset{\mathrm{c}}{\perp} A$ を条件とするからはるかに広く成立する。

$A \subset \hat{\mathcal{G}}$ とする。$\overset{\mathrm{c}}{\perp} A$ と $\forall a, b \in A,\ a \neq b \Rightarrow a \overset{\mathrm{c}}{\perp} b$ は異なる条件である。両方成り立つときに $\overset{\mathrm{c}}{\perp}_2 A$ と書く。$\perp A$ ならば $\overset{\mathrm{c}}{\perp}_2 A$ である。

$\mathbb{P} : \hat{\mathcal{G}} \to [0, 1]$ を有限加法的確率測度とする。$\mathbb{P}$ が以下をみたすとき，**Sorkin 加法性**をもつという: 任意の $A \overset{\mathrm{fin}}{\subset} \hat{\mathcal{G}}$ について，$\#A \geq 3$, $\overset{\mathrm{c}}{\perp}_2 A$ ならば次が成立する。

$$\mathbb{P}\left(\bigovee A\right) = \frac{1}{2} \sum_{a,b \in A, a \neq b} \mathbb{P}(a \ovee b) - (\#A - 2) \sum_{a \in A} \mathbb{P}(a). \tag{4.1}$$

もし $\perp A$ ならば，Sorkin 加法性は普通の加法性に帰着する。

Sorkin 加法性

- 量子力学では確率の Sorkin 加法性が成立する。古典論では，Sorkin 加法性が普通の加法性に帰着するから，やはり成立する。よって Sorkin 加法性は古典と量子に共通する法則である。
- また，多重スリット実験をはじめとする多くの量子現象において確率を定量的に計算する手段（の一部）を与える。
- また，Sorkin 加法性は経験と直接に結びついている。つまり多重スリット実験等により直接検証可能である。

これらの理由により，Sorkin 加法性は，量子と古典の関係についての基本理論における根本原理の一つであると思われる。

Sorkin 加法性

- 量子力学では確率の Sorkin 加法性が成立する。古典論では，Sorkin 加法性が普通の加法性に帰着するから，やはり成立する。よって Sorkin 加法性は古典と量子に共通する法則である。
- また，多重スリット実験をはじめとする多くの量子現象において確率を定量的に計算する手段（の一部）を与える。
- また，Sorkin 加法性は経験と直接に結びついている。つまり多重スリット実験等により直接検証可能である。

これらの理由により，Sorkin 加法性は，量子と古典の関係についての基本理論における根本原理の一つであると思われる。

しかし Sorkin 加法性は極めて非直観的である：より直観的に了解可能かつ実験的に検証可能な別のより良い基本原理を見つけて，そこから Sorkin 加法性を定理として導出すべきと考えるが，それは今後の課題とし，ここでは Sorkin 加法性を天下りに公理として受け入れることとする。

S^2 の量子化

次に $\mathbb{R}^3$ の単位球面 S^2 を考える。これはコンパクトな Kähler 多様体の最も簡単な例である。これはシンプレクティック多様体でもあるから，古典力学的な相空間ともみなせる。

物理の文献で，S^2 を（配位空間ではなく）相空間とする古典力学が現れることはほとんどないが，これを「スピン（内部角運動量）の古典力学」と見ることもできそうである：古典力学では，質点に内部角運動量が存在する可能性を考えないのが普通だが，それを禁止する法はない。

- 大雑把な既知の事実：S^2（上の古典力学）の量子化が可算無限個存在し，その各々が $SU(2)$ の既約ユニタリ表現に相当する。

操作の半群 $\hat{\mathcal{G}}$ 上の Sorkin 加法的な確率測度の観点から，上の S^2 の量子化を公理的に導出するのが短期目標の一つである。

S^2 の量子化

どこまで根源的な原理にまで遡って公理化するかによって S^2 の量子化導出の目標の難易度は違ってくる。最初は目標を最も低くしておく：

- $S^2(\subset \mathbb{R}^3)$ に関わる最も自然な対称性（変換群）は，$\mathbb{R}^3$ における回転群 $SO(3)$ だが，量子化するとその代わりに $SU(2)$ が現れる。この理由を説明するのは，量子化における根源的な問題の一つである。しかし話を簡単にするため（時間の制約のため），ここではこの問題を素通りして $SU(2)$ 対称性を天下りに認める。
- また，「量子状態とは Hil.sp. 上のベクトル（より一般には密度行列）によって表されるものだ」という予断を一切排除して導出したいところだが，ここでは L^2 空間を天下りに導入する。

$SU(2)$ の部分群で $U(1) \cong SO(2)$ に同形なものを一つ固定して，それを単に $U(1)$ と書く。既成の量子化理論が教えるところでは，球面を $S^2 \cong SU(2)/U(1)$ と把握して初めて正しい量子化が得られる。この同形から得られる自然な射影を $\pi : SU(2) \to S^2$ とする (S^2 上の $U(1)$ 主束)。

S^2 の量子化

前量子化（前前量子化？）では，まず Hil.sp. $\mathcal{H} := L^2(SU(2))$ を考える (ここでは複素直線束ではなく $U(1)$ 主束の方で考える．See e.g.[LF18, App.A.1])。

Borel 集合 $A \subset S^2$ に対して $\pi^{-1}(A) \subset SU(2)$ の特性関数を $\chi_{\pi^{-1}(A)} : SU(2) \to \{0,1\}$ とする。これは $\mathcal{H}$ 上の射影作用素とみなせる。それを E_A と書く。$\mathcal{B} := \{E_A : A \in \mathrm{Borel}(S^2)\}$ は完備ブール代数をなし，それは集合のブール代数 $\mathrm{Borel}(S^2)$ を測度 0 の集合族で割った商ブール代数に自然に同形である。

$\mathcal{B}$ 上の確率論は古典力学の確率論（$\approx$ 古典統計力学）にあたる。

$\mathcal{H} := L^2(SU(2))$ は $SU(2)$ の正則ユニタリ表現空間とみなす。その n 次元既約部分表現 $\mathcal{K}_n$ を考える。つまりユニタリ表現 $\mathcal{H}$ を n 次元部分空間 $\mathcal{K}_n \subset \mathcal{H}$ に制限したものが既約ユニタリ表現になっているとする。$\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}_n$ への射影を ε_n とする。

$\mathcal{B} \cup \{\varepsilon_n, \varepsilon'_n\}$, $(\varepsilon'_n := 1 - \varepsilon_n)$ から作用素の積によって生成される Foulis 半群を $\mathcal{G}_n$ とし，その加法的拡大を $\hat{\mathcal{G}}_n$ とする。

また，$\mathcal{B}$ の前量子化 Foulis 半群を $\hat{\mathcal{G}}$ とする。i.e. $\mathcal{H}$ 上の作用素ではない形式的な元 ε を加えて $\mathcal{B} \cup \{\varepsilon, \varepsilon'\}$ から前述のように「自由に」生成される *半群を $\mathcal{G}$ の加法的拡大を $\hat{\mathcal{G}}$ とする。

S^2 の量子化

定理

任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して自然な準同形 $\mathsf{w}_n : \hat{\mathcal{G}} \to \hat{\mathcal{G}}_n$ が一意に存在する。

これは，「リー代数 $\mathfrak{g}$ の任意の包絡代数 $\mathcal{A}$ に対して自然な準同形 $U(\mathfrak{g}) \to \mathcal{A}$ が一意に存在する。」と同類の定理である。 ($U(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ の普遍包絡代数。)

$\mathcal{K}_n$ の単位ベクトル ψ に対して，$\mathbb{P}_{n,\psi} : \hat{\mathcal{G}} \to [0,1]$ を次で定義する。

$$\mathbb{P}_{n,\psi}(a) := \|\mathsf{w}_n(a)\psi\|^2, \qquad a \in \hat{\mathcal{G}}.$$

より一般に $\mathcal{K}_n$ 上の密度行列 ρ に対しては $\mathbb{P}_{n,\rho} : \hat{\mathcal{G}} \to [0,1]$ を $\mathbb{P}_{n,\rho}(a) := \mathrm{Tr}\,(\mathsf{w}_n(a^*a)\rho)$ で定義する。

他方， $\mathsf{w}_c(\varepsilon) = 1, \forall a \in \mathcal{B}, \mathsf{w}_c(a) = a$ をみたす準同形 $\mathsf{w}_c : \hat{\mathcal{G}} \to \mathcal{B}$ (ここで $\mathcal{B}$ は可換な Foulis 半群とみなす) が定まる。$\mathcal{B}$ 上の (古典的な) 確率測度 $\Phi : \mathcal{B} \to [0,1]$ に対して $\mathbb{P}_\Phi : \hat{\mathcal{G}} \to [0,1]$ を $\mathbb{P}_\Phi(a) := \Phi(\mathsf{w}_c(a))$ で定義する。

定理

$\mathbb{P}_{n,\psi}, \mathbb{P}_{n,\rho}$, $\mathbb{P}_\Phi$ は $\hat{\mathcal{G}}$ 上の *Sorkin* 加法的な確率測度である。

これにより，S^2 上の古典的状態と，S^2 の任意の量子化から得られる量子状態が，全て $\hat{\mathcal{G}}$ という単一の Foulis 半群上の Sorkin 確率測度として表せることがわかる。

逆に，古典的状態にも量子状態にも対応しない $\hat{\mathcal{G}}$ 上の Sorkin 確率測度が存在するかどうかは未解決である。今のところその非存在を証明できる見込みはない。よって， Sorkin 加法性だけでは古典・量子力学の特徴づけに十分ではないという見通しのもと，別の原理を追加する必要があろう。

上では Hil.sp. $\mathcal{H} := L^2(SO(2))$ とその部分空間 $\mathcal{K}_n$ を天下りに導入した。次に目標をもう一段上げて，$SU(2)$ にも Hil.sp. に言及せずに「量子確率測度」 を直接導出することを考える。

しかし，そもそも何ができたら「直接導出できた」と言えるのかが全く自明でないので，まずそこから説明する必要がある。

話が長くなるので以下割愛するが，この目標達成はまだ完全ではない。

Sterling K. Berberian.
*Baer *-Rings*.
Springer, Berlin, 2011.
Reprint of the 1972 Edition, ISBN: 978-3-540-05751-2.

F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, and D. Sternheimer.
Deformation theory and quantization I.
Ann. Phys. (NY), 111:61–110, 1978.

F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, and D. Sternheimer.
Deformation theory and quantization II.
Ann. Phys. (NY), 111:111–151, 1978.

H. Barnum, M. P. Müller, and C. Ududec.
Higher-order interference and single-system postulates characterizing quantum theory.
New J. Phys., 16:123029, 2014.
arXiv:1403.4147.

J. Cīrulis.
Lattice operations on Rickart $*$-rings under the star order.
Linear and Multilinear Algebra, 63(3):497–508, feb 2014.
arXiv:1401.6045.

D. J. Foulis and M. K. Bennett.
Effect algebras and unsharp quantum logics.
Foundations of Physics, 24(10), 1994.

D. J. Foulis.
Baer *-semigroups.
Proc. Amer. Math. Soc., 11:648–654, 1960.

Stan Gudder and Richard Greechie.
Sequential products on effect algebras.
Rep. Math. Phys., 49(1):87–111, 2002.

Stan Gudder and Gabriel Nagy.
Sequential quantum measurements.
J. Math. Phys., 42:5212–5222, 2001.
https://doi.org/10.1063/1.1407837.

Stan Gudder and Gabriel Nagy.
Sequentially independent effects.
Proc. A.M.S., 130(4):1125–1130, 2002.

Yohann Le Floch.
A Brief Introduction to Berezin–Toeplitz Operators on Compact Kähler Manifolds.
Springer, Berlin, 2018.
doi:10.1007/978-3-319-94682-5.

F. Maeda and S. Maeda.
Theory of Symmetric Lattices.
Springer, Berlin, 1970.
DOI: 10.1007/978-3-642-46248-1, ISBN-13: 978-3-642-46250-4.

Markus P. Müller.
Probabilistic theories and reconstructions of quantum theory (les houches 2019 lecture notes).
SciPost Phys. Lect. Notes, 28, 2021.
arXiv:2011.01286.

R. D. Sorkin.
Quantum mechanics as quantum measure theory.
Mod. Phys. Lett. A, 9:3119–3128, 1994.
arXiv:gr-qc/9401003.

前田周一郎.
束論と量子論理.
森北出版, pod 版 edition, 1980.
初版：槇出版, 1980.